

Nachklausur
Algorithmentheorie

Wintersemester 09/10

Name: _____ Vorname: _____

Matrikelnummer: _____ Studiengang: _____

Geburtsdatum: _____

↓ **BITTE GENAU LESEN** ↓

Die Klausur besteht aus **10** Aufgaben. Die Klausur ist mit Sicherheit bestanden, wenn (zusammen mit der Bonifikation aus den Übungspunkten) mindestens **50%** der Höchstpunktzahl erreicht wird.

Bitte schreiben Sie oben auf **jeder** Seite in Blockschrift Namen und Matrikelnummer. Überprüfen Sie, ob die Klausur aus insgesamt **13** durchnummerierten Seiten besteht.

Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift oder Rotstift. Zugelassene Hilfsmittel: 1 Blatt DIN A4 mit handschriftlichen Notizen.

Bitte beachten Sie, dass gemäß der Bachelor-Ordnung das Mitbringen nicht zugelassener Hilfsmittel eine Täuschung darstellt und zum Nichtbestehen der Klausur führt. Bitte deshalb Handys vor Beginn der Klausur ausschalten.

Bitte benutzen Sie Rückseiten und die beigegefügteten Zusatzblätter. Weitere Blätter sind erhältlich.

Werden zu einer Aufgabe 2 oder mehr Lösungen angegeben, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Entscheiden Sie sich also immer für **eine** Lösung. Begründungen sind nur dann notwendig, wenn die Aufgabenformulierung dies verlangt.

Die Klausur dauert 180 Minuten.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
10	10	9	10	12	7	14	8	10	10	100

Note

Bonifikation	Σ

Name:	Matrikelnummer:
-------	-----------------

AUFGABE 1**10 Punkte**

Bewerten Sie die folgenden Aussagen. (Richtige Antworten erhalten 2 Punkte, falsche Antworten werden mit -2 Punkten bewertet, keine Antwort ergibt 0 Punkte. Die Gesamtpunktzahl beträgt aber mindestens 0 Punkte.)

(i) Ein Sortierverfahren, das jede Eingabe mit n Schlüsseln in Zeit $O(n^{1.5})$ sortiert, kann nicht vergleichsbasiert sein.

richtig falsch

(ii) Der Dijkstra-Algorithmus berechnet für Graphen mit positiven Kantengewichten einen minimalen Spannbaum.

richtig falsch

(iii) Wenn wir zeigen können, dass das 2-COLOR Problem in polynomieller Zeit lösbar ist, dann haben wir $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ bewiesen.

richtig falsch

(iv) In einem sortierten Feld mit n Schlüsseln benötigt jeder Algorithmus für die Suche nach einem Schlüssel x im schlimmsten Fall mindestens $n - 1$ Vergleiche.

richtig falsch

(v) n Zahlen aus der Menge $\{0, \dots, m^k - 1\}$ können in Zeit $\Theta(k(n + m))$ sortiert werden.

richtig falsch

Name:	Matrikelnummer:
-------	-----------------

AUFGABE 2

5+5 Punkte

Gegeben sei ein anfangs aufsteigend sortiertes Array von n Zahlen a_1, \dots, a_n . In diesem Array werden nun k Elemente verringert, indem positive Zahlen abgezogen werden. Welche Elemente verringert werden, ist nicht bekannt. Ebenso ist nicht bekannt, um welchen Betrag ein Element verringert wird.

Das Array soll nun wieder möglichst effizient aufsteigend sortiert werden.

- a) Geben Sie einen Algorithmus an, der dies in $O(kn)$ Zeit leistet. Begründen Sie die Laufzeit.

- b) Geben Sie einen Algorithmus an, der dies in $O(n + k \log k)$ Zeit leistet. Begründen Sie die Laufzeit.

Name:

Matrikelnummer:

AUFGABE 3

3+3+3 Punkte

Analysieren Sie die asymptotischen Laufzeiten. Gehen Sie davon aus, dass jede als *elementar* bezeichnete Anweisung $O(1)$ Zeit beansprucht.

a)

```
for (i=1; i<=n; i++)
  for(j=1; j<=n; j++)
    if(i==j) { fuehre 2*i elementare Anweisungen aus; }
```

Die Laufzeit in Abhängigkeit von n ist: $\Theta(\quad)$

b)

```
k=random(1,n); // Zufallszahl gleichverteilt aus der Menge {1,...,n}
if(k==1)
  { fuehre n*log(n) elementare Anweisungen aus; }
else
  { fuehre 5 elementare Anweisungen aus; }
```

Die **erwartete** Laufzeit in Abhängigkeit von n ist: $\Theta(\quad)$

c)

```
i=1;
while(i<n){
  i=i*5;
}
```

Die Laufzeit in Abhängigkeit von n ist: $\Theta(\quad)$

Name:	Matrikelnummer:
-------	-----------------

AUFGABE 4**5+5 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Kantengewichtsfunktion w und T ein minimaler Spannbaum von G . Entscheiden Sie in folgenden Fällen ob T ein minimaler Spannbaum unter der Gewichtsfunktion w' bleibt. Beweisen Sie Ihre Aussage.

- a) Für eine Konstante $c > 0$ definieren wir w' für jede Kante e als $w'(e) = c + w(e)$.
- b) Für eine Konstante $c > 0$ definieren wir w' für jede Kante e als $w'(e) = c \cdot w(e)$.

Name:

Matrikelnummer:

AUFGABE 5

4+4+4 Punkte

Geben Sie kurze Antworten:

- a) Gegeben sei ein aufsteigend sortiertes Array mit 100 Elementen. Wieviele Leseoperationen auf dem Array benötigt der Algorithmus *binäre Suche* höchstens, um ein Element in diesem Feld zu finden bzw. festzustellen, dass das Element nicht im Feld enthalten ist.

Exakte Anzahl an Leseoperationen:

- b) Das Problem den längsten Weg zwischen Knoten a und b in einem beliebigen gerichteten Graphen zu finden ist \mathcal{NP} -hart. Kann das Problem in polynomieller Zeit gelöst werden, wenn G ein gerichteter azyklischer Graph ist und nur positive Kantengewichte hat? Begründen Sie Ihre Antwort.

- c) Es liegen 3 aufsteigend sortierte Folgen L_1, L_2, L_3 vor, welche jeweils n_1, n_2, n_3 Elemente enthalten. Die Elemente aus allen 3 Folgen sollen mit Hilfe von 2-Wege-Mischen (von Mergesort benutzte Prozedur, welche 2 sortierte Folgen mischt) aufsteigend sortiert werden.

In welcher Reihenfolge führt das Mischen zu einer minimalen Anzahl an Vergleichen im worst case, wenn $n_1 < n_2 < n_3$ gilt? Wieviele Vergleiche führt Ihre Mischstrategie im schlimmsten Fall aus? In dieser Aufgabe interessiert uns die **exakte** Anzahl an Vergleichen und nicht die asymptotische.

Mischreihenfolge:

Exakte (worst case) Anzahl an Vergleichen in Abh. von n_1, n_2, n_3 :

Name:	Matrikelnummer:
-------	-----------------

AUFGABE 6

7 Punkte

Eine Werbeabteilung möchte für ein Produkt eine Absatzsteigerung erreichen. Dazu soll ein Werbespot auf drei Fernsehkanälen A, B, C ausgestrahlt werden. Pro Ausstrahlung des Werbespots auf Kanal A werden 30000 Zuschauer erwartet, 10000 Zuschauer auf Kanal B und 40000 Zuschauer auf Kanal C . Man möchte, dass der Werbespot mindestens 200000 mal von Zuschauern gesehen wird. Auf Kanal A und B soll der Werbespot zusammen mindestens drei mal gesendet werden. Auf Kanal C soll dieser mindestens so oft gesendet werden wie auf den beiden anderen Kanälen zusammen. Die Kosten pro Ausstrahlung auf Kanal A betragen 2000 EUR, 1500 EUR auf Kanal B und 4000 EUR auf Kanal C . Die Ausstrahlungen des Werbespots sollen so platziert werden, dass die Gesamtkosten unter Einhaltung der Vorgaben minimal ausfallen.

Formulieren Sie das dazugehörige Problem als **lineares Programm**.

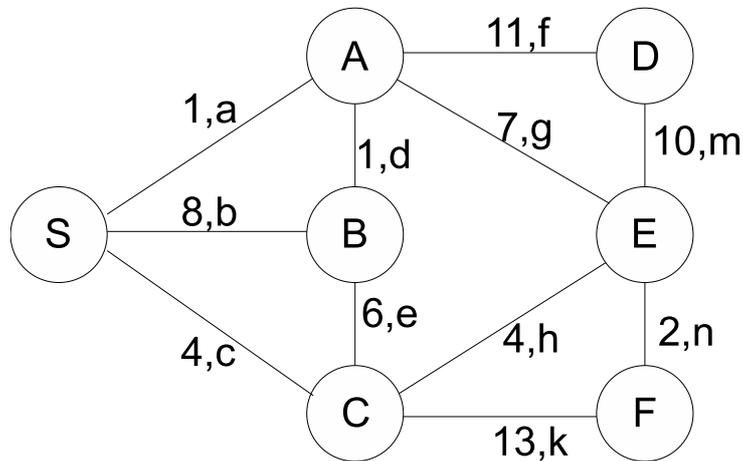
Name:

Matrikelnummer:

AUFGABE 7

7 + 7 Punkte

Gegeben sei der folgende Graph:



- a) **Geben Sie an**, welche Kanten der Algorithmus von **Prim** zur Bestimmung des minimalen Spannbaumes auswählt und in welcher Reihenfolge die Kanten ausgewählt werden. Startknoten ist der Knoten S .

Die Reihenfolge, in der Kanten ausgewählt werden:

- b) **Geben Sie** den vom Algorithmus von Dijkstra berechneten Baum der kürzesten Wege an. Startknoten ist der Knoten S .

Der Baum kürzester Wege:

Name:	Matrikelnummer:
-------	-----------------

AUFGABE 8

8 Punkte

Gegeben seien n Fruchtsäfte F_1, \dots, F_n . Der Fruchtsaft F_i hat dabei den Brennwert von B_i Kalorien pro Liter. Von dem Fruchtsaft F_i haben Sie L_i Liter vorrätig.

Sie möchten aus den vorrätigen Fruchtsäften nun X Liter eines Getränkes mit minimalem Brennwert mischen. Der Geschmack des Getränks ist dabei nicht von Interesse. Gesucht ist ein Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$, der die verwendeten Mengen der Fruchtsäfte liefert. Sie können davon ausgehen, dass $\sum_{i=1}^n L_i \geq X$ gilt.

Beachten Sie bei der Lösung folgende Punkte:

- Beschreiben Sie Ihre Strategie.
- Geben Sie einen Algorithmus an. Dazu können Sie annehmen, dass die Brennwerte und die Vorratsmengen in einem Array $B[1, \dots, n]$ bzw. $L[1, \dots, n]$ vorliegen.
- Begründen Sie kurz warum Ihr Algorithmus die gewünschte Laufzeit erreicht.

Name:	Matrikelnummer:
-------	-----------------

AUFGABE 9

10 Punkte

In einem Supermarkt werden Batterien nur in Packungen von 6 Stück, 9 Stück und 20 Stück verkauft. Sie können immer nur ganze Packungen kaufen. D.h. es ist nicht möglich zum Beispiel genau 5 Batterien oder genau 7 Batterien zu kaufen. In dieser Aufgabe sollen Sie ein dynamisches Programm entwickeln, das zu gegebenem N ausrechnet, ob es möglich ist genau N Batterien zu kaufen.

Beachten Sie bei der Lösung folgende Punkte:

- Definition der Teilprobleme.
- Rekursionsgleichung für das Lösen der Teilprobleme
- Iterative Berechnung der Teilprobleme
- Laufzeitanalyse

Name:	Matrikelnummer:
-------	-----------------

AUFGABE 10**3+7 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine *Partition* der Knotenmenge V ist eine Aufteilung der Knoten auf disjunkte Mengen.

Eine Knotenmenge $C \subseteq V$ ist ein INDEPENDENT SET (IS), falls kein Knotenpaar aus C durch eine Kante in G miteinander verbunden ist.

Das Entscheidungsproblem k -IS-PARTITION ist folgendes:

$$k\text{-IS-PARTITION} = \left\{ G = (V, E) \left| \begin{array}{l} \text{Es gibt eine Partition von } V \text{ in höchstens } k \text{ Teilmengen,} \\ \text{so dass jede dieser Teilmengen ein INDEPENDENT SET ist} \end{array} \right. \right\}$$

- Zeigen Sie, dass 2-IS-PARTITION in polynomieller Zeit lösbar ist.
- Zeigen Sie, dass 3-IS-PARTITION \mathcal{NP} -vollständig ist. Sie können annehmen, dass 3-COLOR \mathcal{NP} -vollständig ist.

$$3\text{-COLOR} = \left\{ G \left| \begin{array}{l} \text{Es gibt eine Zuordnung der Knoten von } G \text{ zu 3 Farben,} \\ \text{so dass keine zwei benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben} \end{array} \right. \right\}$$

Name:

Matrikelnummer:

Name:

Matrikelnummer: