

Effiziente Algorithmen

Sommersemester 2019

Prof. Dr. Martin Hoefer
Dr. Daniel Schmand
Martin Ludwig, Conrad Schecker



Institut für Informatik
Algorithmen & Komplexität

Übung 11

Ausgabe: 02.07.2019
Abgabe: 09.07.2019, 10:15

Aufgabe 11.1.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Man kann die **Insert**(x)-Operation bei Splay-Bäumen wie folgt definieren: Falls es im bisherigen Splay-Baum keinen Knoten v mit Schlüssel $s_v < x$ gibt, füge x als neue Wurzel ein und hänge die bisherige Wurzel als rechten Teilbaum an x an. Falls es einen Knoten v mit Schlüssel $s_v < x$ gibt, führe **Splay**(x) aus. Sei T_L der linke und T_R der rechte Teilbaum der Wurzel. Erstelle eine neue Wurzel mit Schlüsselwert x . Hänge die bisherige Wurzel und T_L links an, hänge T_R rechts an.

- Sei T ein leerer Splay-Baum und $n > 0$ eine ganze Zahl. Finden Sie eine Permutation σ auf der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$, so dass ein sukzessives Einfügen der Zahlen in der durch σ gegebenen Reihenfolge einen Splay-Baum maximaler Höhe erzeugt.
- Sei T ein leerer Splay-Baum. Finden Sie eine Permutation auf der Menge $\{1, 2, 3\}$, so dass ein sukzessives Einfügen der Zahlen in der durch σ gegebenen Reihenfolge einen Splay-Baum minimaler Höhe erzeugt.
- Sei T ein leerer Splay-Baum. Finden Sie eine Permutation auf der Menge $\{1, \dots, 7\}$, so dass ein sukzessives Einfügen der Zahlen in der durch σ gegebenen Reihenfolge einen Splay-Baum minimaler Höhe erzeugt.

Begründen Sie die Wahl ihrer Permutation in allen 3 Teilaufgaben.

Aufgabe 11.2.

(3 + 3 Punkte)

Wir haben in der Vorlesung ein randomisiertes Protokoll für *Byzantine Agreement* diskutiert. Dabei haben wir angenommen, dass es $t < n/8$ fehlerhafte Prozessoren gibt.

- Ändern Sie die Grenzwerte für **Schwelle** und **Entscheidung** aus dem Protokoll aus der Vorlesung bzw. den Notizen so, dass es auch für $t < n/7$ fehlerhafte Prozessoren funktioniert. Beweisen Sie die Korrektheit des Protokolls.
- Angenommen die Anzahl der fehlerhaften Prozessoren sei noch größer. Benutzen Sie die Idee aus *a)* und bestimmen Sie neue Grenzwerte für **Schwelle** und **Entscheidung** sodass das Protokoll für $t < xn$ fehlerhafte Prozessoren funktioniert. Auf einen Beweis der Korrektheit kann hier verzichtet werden. Welches ist das größtmögliche x , was wir hier wählen dürfen? Welche der 4 Behauptungen aus dem Beweis der Vorlesung lässt sich für noch größeres x nicht mehr analog beweisen? Warum?

Bitte wenden!

Aufgabe 11.3.

(4 Punkte)

Wir betrachten das Problem einer 2-Färbung in einem k -regulären Hypergraphen. Ein k -regulärer Hypergraph $G = (V, E)$ ist durch eine Knotenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq V^k$ gegeben. Eine zulässige 2-Färbung ist eine Abbildung von der Knotenmenge nach $\{\text{blau, rot}\}$, sodass keine Kante aus nur identisch gefärbten Knoten besteht. Zeigen Sie die folgende Aussage: Ein k -regulärer Hypergraph mit weniger als 2^{k-1} Hyperkanten ist immer 2-färbbar.

Die Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie unter
<http://algo.cs.uni-frankfurt.de/lehre/ea/sommer19/ea19.shtml>

E-Mail: {mhoefer,schmand}@em.uni-frankfurt.de