

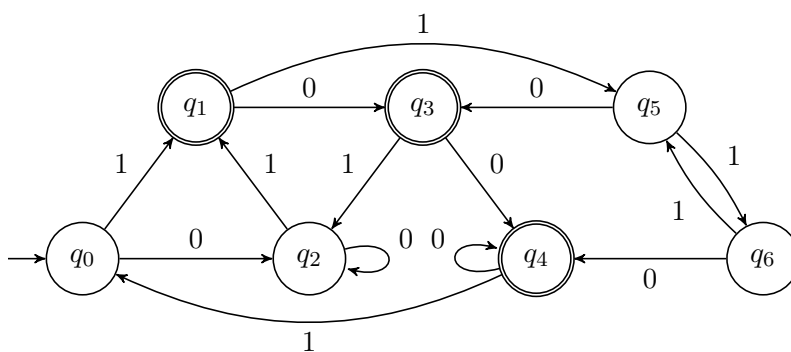
## Übungsblatt 11

Ausgabe: 22.01.2024  
Abgabe: 29.01.2024, 23:55 Uhr

### Aufgabe 11.1. Minimierung von DFAs

(11 Punkte)

Gegeben sei der folgende DFA  $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ .



Minimieren Sie  $A$ , indem Sie den Äquivalenzklassenautomaten  $A'$  bestimmen. Verwenden Sie dazu den Algorithmus aus der Vorlesung unter Angabe und Begründung aller Zwischenschritte. Geben Sie dabei auch die aus der Vorlesung bekannte Tabelle an, in der Paare inäquivalenter Zustände mit  $M_i$  (für das entsprechende  $i \in \mathbb{N}$ ) markiert sind. Stellen Sie  $A'$  graphisch dar.

### Aufgabe 11.2. Nerode-Relation und Nerode-Automaten

(2 + 5 + 4 + 3 = 14 Punkte)

**Definition:** Für ein beliebiges Alphabet  $\Sigma$  und Sprachen  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  sei die Konkatenation von  $L_1$  und  $L_2$  gegeben durch  $L_1 \cdot L_2 := \{uv : u \in L_1, v \in L_2\}$ .

Betrachte nun die konkreten Sprachen  $L_1 := \{00\} \cdot \Sigma^*$ ,  $L_2 := \Sigma^* \cdot \{000\} \cdot \Sigma^*$ , sowie  $L := L_1 \cap \overline{L_2}$ , jeweils über dem Alphabet  $\Sigma = \{0, 1\}$ .

a) Beschreiben Sie  $L$  umgangssprachlich.

*Hinweis:* Das für die Komplementbildung verwendete Universum ist  $\Sigma^*$ .

b) Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen der Nerode-Relation  $\equiv_L$  für  $L$  und geben Sie für jede Äquivalenzklasse die Menge aller enthaltenen Worte an (z.B.  $[\varepsilon]_L = \{\dots\}$ ). Beschreiben Sie jede unendlich große Äquivalenzklasse außerdem umgangssprachlich.

*Hinweis:* Beginnen Sie zur Bestimmung der Äquivalenzklassen mit  $[\varepsilon]_L$ . Überlegen Sie sich in jedem Schritt für alle bisher entdeckten Äquivalenzklassen und alle  $a \in \Sigma$ , was passiert, wenn ein Repräsentant  $w$  der Äquivalenzklasse mit  $a$  konkateniert wird. Gibt es  $[wa]_L$  vielleicht schon, oder handelt es sich um eine neue Äquivalenzklasse?

c) Wählen Sie für jede Äquivalenzklasse von  $\equiv_L$  einen Repräsentanten kürzester Länge und trennen Sie alle gewählten Repräsentanten paarweise verschiedener Klassen, indem Sie einen (möglichst kurzen) Zeugen bestimmen.

d) Stellen Sie den Nerode-Automaten der Sprache  $L$  graphisch dar.

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 11.3. Home, Sweet Home**

(5 + 5 + 5 + 10\* = 15 Punkte + 10 Bonuspunkte)

Um Ihr Privileg auf Home-Office nicht gänzlich einzubüßen, beschließen Sie zur Besänftigung Ihrer Vorgesetzten Ihre Präsenz im Büro vor Ort zu erhöhen. Sie haben daher für sich die folgenden Anwesenheitsregeln formuliert (mit  $p, s \in \mathbb{N}$ ):

$R_1$ : „Für jeden Arbeitstag gilt: Entweder ich fahre ins Büro oder ich bin im Home-Office“

$R_2$ : „An höchstens  $p$  aufeinanderfolgenden Arbeitstagen bin ich im Home-Office“

$R_3$ : „An mindestens  $s$  Arbeitstagen fahre ich ins Büro“

Um einen Überblick zu behalten, notieren Sie sich für jeden Arbeitstag, ob Sie diesen im Büro (kurz:  $B$ ) oder im Home-Office (kurz:  $H$ ) verbracht haben. In unregelmäßigen Abständen überprüfen Sie anhand Ihrer Notizen, ob Sie Ihre Anwesenheitsregeln eingehalten haben.

- Konstruieren Sie einen DFA  $A_p$  über  $\Sigma = \{H, B\}$  mit möglichst wenigen Zuständen, der beschreibt, dass Sie die Regeln  $R_1$  und  $R_2$  eingehalten haben.
- Konstruieren Sie einen DFA  $A_s$  über  $\Sigma = \{H, B\}$  mit möglichst wenigen Zuständen, der beschreibt, dass Sie die Regeln  $R_1$  und  $R_3$  eingehalten haben.
- Konstruieren Sie einen DFA  $A_{p,s}$  über  $\Sigma = \{H, B\}$  mit möglichst wenigen Zuständen, der beschreibt, dass Sie die Regeln  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  eingehalten haben.

*Hinweis:* Konstruieren Sie einen DFA  $A_{p,s}$ , der  $L(A_p) \cap L(A_s)$  akzeptiert.

d\*) Zeigen Sie:  $\text{Index}(L(A_{p,s})) \geq p \cdot s$ .

Erläutern Sie jeweils kurz Ihre Modellierung und skizzieren Sie die Zustandsdiagramme.

**Aufgabe 11.4. Grenzen der Regularität**

(5 + 5 = 10 Punkte)

**Definition:** Für ein Alphabet  $\Sigma$ , einen Buchstaben  $\sigma \in \Sigma$  und ein Wort  $w \in \Sigma^*$  bezeichnet  $|w|_\sigma$  die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens  $\sigma$  im Wort  $w$ . Zum Beispiel gilt  $|aababa|_a = 4$ ,  $|aababa|_b = 2$  und  $|aababa|_c = 0$ .

Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Myhill-Nerode II, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

- $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* : |w|_b < |w|_a\}$  über  $\Sigma = \{a, b\}$
- $L_2 := \{bab^2ab^3a \cdots b^na : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$  über  $\Sigma = \{a, b\}$