Diskrete Modellierung

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. Martin Hoefer
Tim Koglin, Conrad Schecker

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

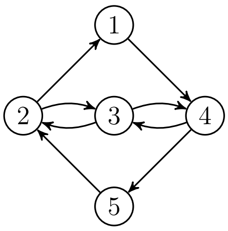
Übungsblatt 9

Ausgabe: 08.01.2024
Abgabe: 15.01.2024, 23:55 Uhr

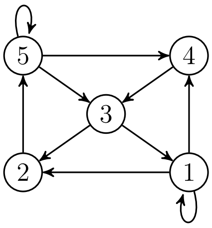
Aufgabe 9.1. *Irreduzibilität und Aperiodizität* (6 + 8 = 14 Punkte)

a) Geben Sie für jeden der folgenden gerichteten Graphen G_1, G_2 und G_3 an, ob dieser irreduzibel ist (oder nicht) und/oder aperiodisch ist (oder nicht).

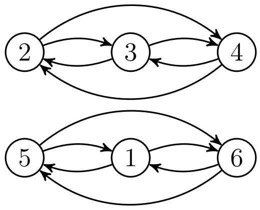
G_1:



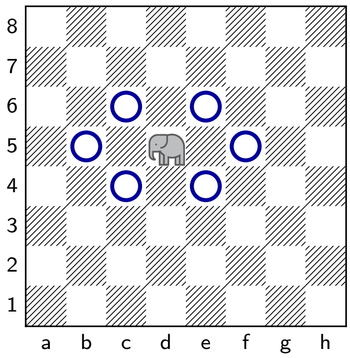
G_2:

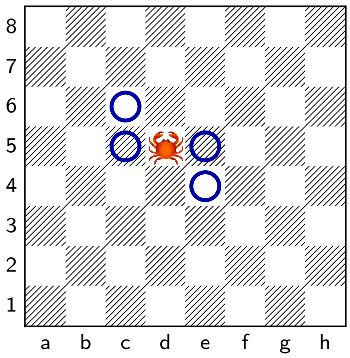


G_3:



b) Betrachten Sie eine Erweiterung des Schachspiels um zwei Fantasiefiguren *Elefant* und *Krabbe* auf einem gewöhnlichen 8×8-Schachbrett ein. Die möglichen Züge der beiden Figuren sind mit blauen Kreisen in den folgenden Abbildungen markiert (links: Elefant, rechts: Krabbe).





Sei $F \in \{\text{Elefant}, \text{Krabbe}\}$ eine Figur. Wir modellieren die Bewegung von F durch eine Markov-Kette (G_F, P_F) mit den Zuständen $V := \{\text{a}, \dots, \text{h}\} \times \{1, \dots, 8\}$. In jedem Zustand $v \in V$ entsprechen die Zustandsübergänge (v, w) den möglichen Zügen von F in Position v. Dabei besitzt jeder Übergang die gleiche Wahrscheinlichkeit. Es ist nicht zulässig, dass die Figur auf ihrem Feld stehen bleibt, sie *muss* sich bewegen.

Geben Sie jeweils an, ob die so beschriebene Markov-Kette irreduzibel ist (oder nicht) und/oder aperiodisch ist (oder nicht), wenn es sich bei der Figur F um

i) einen Elefanten

ii) eine Krabbe

handelt. Sie brauchen für ihre Begründung die Markov-Kette bzw. den Graphen und die Übergangsmatrix nicht explizit zu bestimmen.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.2. *Page-Rank* (3 + 4 + 5 = 12 Punkte)

Gegeben sei die Übergangsmatrix $P_d(\textsc{Web})$ einer Webkette $\mathcal{W} = (G, P_d(\textsc{Web}))$, die aus einem Webgraphen $\textsc{Web}$ mit Dämpfungsfaktor d resultiere. Es gelte

$$P_d(\textsc{Web}) = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Der zugrunde liegende Webgraph $\textsc{Web}$ soll rekonstruiert werden. Nehmen Sie hierfür an, dass der Dämpfungsfaktor $d = \frac{2}{3}$ beträgt und geben Sie $\textsc{Web}$ graphisch an (ohne Begründung).

b) Ein Zufallssurfer starte seine Irrfahrt deterministisch in Knoten 1, d.h. für die Anfangsverteilung gelte $\pi^{(0)} = (1, 0, 0)$. Berechnen Sie, wo sich der Zufallssurfer mit welcher Wahrscheinlichkeit nach einem Schritt und nach zwei Schritten aufhält, d.h. berechnen Sie $\pi^{(1)}$ und $\pi^{(2)}$.

c) Bestimmen Sie ein Tupel PR mit der Page-Rank-Eigenschaft bezüglich $d = \frac{2}{3}$ für $\textsc{Web}$.

Aufgabe 9.3. *Der Eine Ring* (4 + 6 + 3 = 13 Punkte)

Um die Chancen der Zerstörung des Einen Ringes besser abschätzen zu können, trägt die Gemeinschaft des Ringes ihre Überlegungen zusammen. Bekanntlich wählt der Ring seinen Besitzer selbst aus, wobei sie bisher von folgenden Besitzern wissen: Zu Beginn gehörte er dem **Feind** der freien Völker Mittelerdes, der den Ring geschaffen hatte. Später waren sowohl **Hobbits** längere Zeit die Besitzer, als auch **Menschen**, die bekanntlich in der Schlacht des letzten Bündnisses an den Ring gelangen konnten. Es wird deutlich, dass der Besitz des Ringes grundsätzlich nach einem Zufallsprinzip zwischen diesen Gruppen wechselt und die Wahrscheinlichkeiten für einen Wechsel nur von der Gruppenzugehörigkeit des bisherigen Besitzers abhängen:

(I) Befindet sich der Ring in der Hand des Feindes, dann ist sein neuer Besitzer in zwei von drei Fällen wieder aus den Reihen des Feindes. Die Wahrscheinlichkeit, den Ring an eine der anderen Gruppen zu verlieren, ist für diese jeweils identisch.

(II) Jeder Hobbit würde den Ring mit derselben Wahrscheinlichkeit an den Feind verlieren wie ihn an einen Hobbit oder Menschen weiterzugeben. Ihn an die Menschen abzugeben ist dabei für die Hobbits dreimal so wahrscheinlich wie ihn an einen Hobbit weiterzugeben.

(III) Menschen verlieren den Ring dreimal so häufig an den Feind wie an die Hobbits und niemals an andere Menschen.

a) Modellieren Sie die Überlegungen zum Wechsel des Besitzers des Ringes mithilfe einer Markov-Kette $\mathcal{M} = (G, P)$ als Irrfahrt zwischen den Zuständen 1 (Feind hat den Ring), 2 (Hobbits haben den Ring) und 3 (Menschen haben den Ring). Illustrieren Sie hierfür den Graphen G, bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten und vermerken Sie diese an den Kanten. Geben Sie außerdem die Übergangsmatrix P an.

b) Die Gemeinschaft vermutet, dass sowohl die Menschen, als auch die Hobbits jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{23}\left(1 - 2^{-3t} \cdot 3^{-t}\right)$ nach $t \in \mathbb{N}$ Schritten in Besitz des Ringes sind, wenn der Ring zu Beginn in Besitz des Feindes war.

Formalisieren Sie diese Vermutung als Verteilung $\pi^{(t)}$, die die Wahrscheinlichkeiten für den Besitz nach t Schritten für jede der drei Gruppen unter der Annahme angibt, dass für die Anfangsverteilung $\pi^{(0)} = (1, 0, 0)$ gelte. Beweisen Sie die Korrektheit der Vermutung mittels vollständiger Induktion.

c) Angenommen, der Ring gehörte zu Beginn dem Feind und wechselt danach unaufhörlich den Besitzer. Berechnen Sie den Wert, gegen den die Wahrscheinlichkeit, dass die Menschen in Besitz des Ringes sind, konvergiert. Sie dürfen annehmen, dass die Vermutung der Gemeinschaft aus der vorherigen Teilaufgabe korrekt ist.

Begründen Sie, ob sich dieser Wert verändert, wenn man nicht annehmen kann, dass der Ring zu Beginn dem Feind gehörte.

Aufgabe 9.4. *Ein fellig verrücktes Abenteuer* (5 + 5 + 1 = 11 Punkte)

Ein Suchtrupp möchte den sagenhaften Yeti aufspüren, der sich bekanntermaßen vorzüglich auf den höheren Gipfeln des Himalayas aufhält. Der Trupp besitzt keine Karte des Gebietes und aufgrund des Wetters ist die Sicht in die Ferne eingeschränkt. Um den Yeti dennoch zu finden, verfolgt der Trupp einen randomisierten Ansatz und geht zufällig bergauf oder bergab.

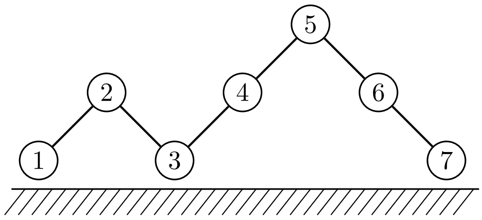
Das Gebirge ist als eine Menge von Knoten $V := \{1, \ldots, n\}$ gegeben. Jedem Knoten ist durch eine Funktion $H : V \to \mathbb{N}$ seine Höhe zugeordnet. Zwischen je zwei Knoten $i, i+1 \in V$ gibt es einen Weg, und deren Höhenunterschied beträgt genau 1 oder -1, d.h., $|H(i) - H(i+1)| = 1$.

Die Irrfahrt des Trupps kann als Markov-Kette mit Zustandsmenge V modelliert werden. Von Zustand i aus wird ein Nachbarzustand $j \in \{i-1, i+1\}$ mit Wahrscheinlichkeit u (*upwards*) besucht, falls $H(j) > H(i)$; und mit Wahrscheinlichkeit d (*downwards*) besucht, falls $H(j) < H(i)$. Dabei gilt $0 < d \leq u \leq \frac{1}{2}$. Mit der restlichen Wahrscheinlichkeit verbleibt die Kette in Zustand i. Formal gilt für die Einträge der Übergangsmatrix P:

$$\text{Für } i \in \{2, \ldots, n-1\} \text{ gilt } P_{i,j} = \begin{cases} u & \text{falls } j \in \{i-1, i+1\} \text{ und } H(j) > H(i), \\ d & \text{falls } j \in \{i-1, i+1\} \text{ und } H(j) < H(i), \\ 1 - P_{i,i-1} - P_{i,i+1} & \text{falls } j = i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Zustände 1 und n gelten entsprechende Übergangswahrscheinlichkeiten, wobei hier jeweils nur ein Nachbarzustand existiert.

a) Betrachten Sie das Bergmassiv *Annapurna Himal* in der folgenden Abbildung mit $n = 7$ und $H(1) = H(3) = H(7) = 0$, $H(2) = H(4) = H(6) = 1$ und $H(5) = 2$.



Geben Sie für die folgende Parameterwahl von u und d in i) und ii) jeweils den Graphen der Markov-Kette an und beschriften Sie die Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten. Berechnen Sie anschließend die Grenzverteilung näherungsweise auf vier Nachkommastellen, beispielsweise mithilfe eines Matrizenrechners (z.B. https://matrixcalc.org/de). Der Suchtrupp starte am linken Fuß des Berges, d.h., in Knoten 1.

Geben Sie außerdem an, in welcher der beiden Ketten mehr Schritte notwendig sind, um die Grenzverteilung näherungsweise zu erreichen.

i) $u = \frac{2}{5}, \quad d = \frac{1}{5}$ ii) $u = \frac{2}{5}, \quad d = \frac{1}{50}$

b) Zeigen Sie für allgemeine Gebirge: Für jede Wahl von n, u, d und H ist die Verteilung $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ mit

$$\mu_i := \frac{1}{\mathcal{C}} \cdot \left(\frac{u}{d}\right)^{H(i)} \quad \text{für alle } i \in V$$

stationär, wobei $\mathcal{C} := \sum_{i=1}^{n} (u/d)^{H(i)} > 0$ eine Konstante zur Normierung der Verteilung ist.

c) Wie sollten u und d gewählt werden, damit der Suchtrupp nach einer unendlich langen Wanderung mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit auf einem hohen Gipfel steht? (Die Frage betrifft also die Grenzverteilung)

Die Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie unter
https://algo.cs.uni-frankfurt.de/lehre/dismod/winter2324/dismod2324.php

Kontakt: Tim Koglin, Conrad Schecker (dismod23@cs.uni-frankfurt.de).