Diskrete Modellierung

Wintersemester 2023/24

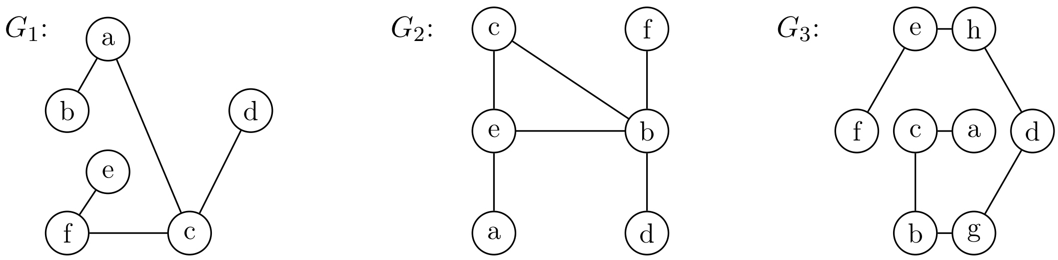
Prof. Dr. Martin Hoefer
Tim Koglin, Conrad Schecker

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übungsblatt 8

Ausgabe: 18.12.2023
Abgabe: 08.01.2024, 23:55 Uhr

Aufgabe 8.1. *Eigenschaften von Bäumen* $((4+2)+6+2+(2+4) = 20$ Punkte$)$



a) Betrachten Sie die obigen Graphen G_1, G_2 und G_3.

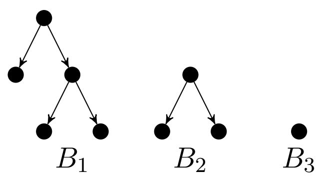
   i) Geben Sie für jeden der obigen Graphen an, ob dieser ein (ungerichteter) Baum ist oder nicht. Geben Sie außerdem für jeden Graphen, der kein Baum ist, einen Spannbaum an.

   ii) Bestimmen Sie für jeden der obigen Bäume eine Wurzel, so dass der zugehörige gewurzelte Baum eine möglichst geringe Tiefe hat und geben Sie die Tiefe an. Eine Begründung ist nicht notwendig.

b) Geben Sie für jeden der gewurzelten Bäume B_1, B_2 und B_3 an, ob die Bezeichnungen in i) und ii) auf diesen zutreffen oder nicht.

   i) Voller Binärbaum
   ii) Vollständiger Binärbaum

   Sie können die Tabelle rechts als Vorlage verwenden.



c)	B_1	B_2	B_3
i)			
ii)			

   Für jede richtige Entscheidung erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche Entscheidung wird ein Punkt abgezogen. Ihre Mindestpunktzahl ist null, Ihre Höchstpunktzahl ist sechs.

c) Geben Sie einen Syntaxbaum für die aussagenlogische Formel $\varphi := \neg\big(x \wedge (\neg y \oplus z)\big)$ an.

Bitte wenden!

d) Betrachte die Funktion `prod` zur Berechnung eines Produkts $x \cdot k$, wobei $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$:

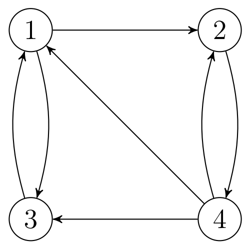
```
def prod(x,k):
    if k == 0:
        return 0
    elif k % 2 == 0:                 # k ist gerade und groesser 0
        return prod(2*x, k/2)
    else:                            # k ist ungerade
        return prod(2*x, k//2) + x   # k//2 entspricht der
                                     # ganzzahligen Division (k-1)/2
```

i) Geben Sie den Rekursionsbaum Baum$(13, 37)$ für den Aufruf $\texttt{prod}(13, 37)$ in grafischer Darstellung an. Beschriften Sie jeden Knoten, der einem Aufruf $\texttt{prod}(\mathrm{x}, \mathrm{k})$ entspricht, mit dem Tupel (x, k).

ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Tiefe des Rekursionsbaums Baum$(x,\ 2^n - 2)$ für den Aufruf $\texttt{prod}(\mathrm{x}, 2^n - 2)$.

Aufgabe 8.2. *Weihnachtsdekorationen bewundern* $(6 + 2 + 2 = 10$ Punkte)

Im Heimatort von Alice und Bob ist es üblich, dass die Hausfassaden zur Weihnachtszeit aufwändig dekoriert werden. Alice und Bob fahren gemeinsam durch den Ort, der nur aus Einbahnstraßen besteht, und spielen das folgende Spiel: An jeder Kreuzung nennen sie abwechselnd die nächste Straße, die sie befahren. Dabei bewundern sie die Hausfassaden. Natürlich wollen sie keine Straße zweimal durchfahren. Wer als erstes keine Straße mehr nennen kann, die noch nicht durchfahren wurde, hat verloren.



Das Einbahnstraßennetz ist durch den abgebildeten gerichteten Graphen gegeben. Die beiden beginnen ihre Tour in Knoten 1 und Alice beginnt damit, die erste Straße zu nennen.

a) Modellieren Sie das beschriebene Spiel mithilfe eines Spielbaums. Erklären und begründen Sie kurz, wie die Zustände des Spiels modelliert werden.

b) Hat Alice eine Gewinnstrategie? Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe des Spielbaums.

c) Hat Bob eine Gewinnstrategie? Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe des Spielbaums.

Aufgabe 8.3. *Weihnachtsbaum schmücken* (8 Punkte)

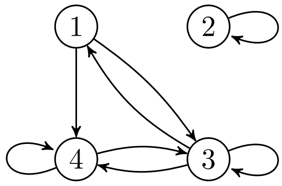
Ein formschöner Weihnachtsbaum soll üppig mit Weihnachtsschmuck dekoriert werden. Damit er trotzdem ordentlich aussieht, soll der Weihnachtsschmuck nur entlang festgelegter horizontaler Reihen am Baum angebracht werden. Das bedeutet, die grüne Krone des Baums wird in $t \geq 1$ Etagen $h_1, h_2, ..., h_t$ unterteilt, wobei h_1 stets die Spitze des Baumes bezeichnet. Auf der Spitze soll genau ein Dekoelement angebracht werden. Auf jeder darauffolgenden Etage h_i soll es pro Dekoelement in der vorherigen Etage h_{i-1} genau k-mal so viele Dekoelemente geben, wobei $k \in \mathbb{N}$. Einen nach dieser Regel dekorierten Baum bezeichnen wir als *k-dekoriert.* Hinzu kommt, dass eine Etage h_i überhaupt nur dann existieren darf, wenn sowohl sie selbst als auch alle vorherigen Etagen $h_1, ..., h_{i-1}$ nach obiger Regel vollständig mit Dekoelementen gefüllt werden können.

Zeigen Sie, dass für $k \geq 2$ genau $\frac{k^t - 1}{k-1}$ Dekoelemente benötigt werden, um einen k-dekorierten Baum mit t Etagen vollständig zu dekorieren.

Bitte wenden!

Aufgabe 8.4. *Peer-Review und Page-Rank* (4 + 4 + 2 + 2 = 12 Punkte)

Wir untersuchen des Ansatz des **Peer-Review** für den rechts dargestellten Webgraphen WEB:



WEB

a) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix $P_d(\text{WEB})$ für den Dämpfungsfaktor $d = \frac{1}{4}$.

b) Zeigen Sie, dass die Verteilung $\text{PR} := \left(\frac{21}{100}, \frac{1}{4}, \frac{27}{100}, \frac{27}{100}\right)$ die Page-Rank-Eigenschaft (bzgl. $d = \frac{1}{4}$) besitzt.

   Hinweis: Sie müssen kein lineares Gleichungssystem **lösen**, sondern nur überprüfen, ob PR eine Lösung ist.

c) Wie ändern sich die Page-Ranks PR_i der Seiten $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, wenn dem Webgraphen WEB ein Link von Webseite 1 auf sich selbst hinzugefügt wird? Welche steigen, welche sinken, welche bleiben gleich? Eine kurze, begründete Antwort genügt, ein Beweis ist nicht erforderlich.

d) Erklären Sie kurz die Bedeutung des Dämpfungsfaktors d für den Zufallssurfer:
   Wie wirkt sich eine Veränderung von d auf den Zufallssurfer aus? Wie bewegt er sich in den Randfällen bei $d = 0$ bzw. $d = 1$ durch den Webgraphen?

Eine schöne Winterpause und einen guten Rutsch ins Jahr 2024!