Diskrete Modellierung

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. Martin Hoefer
Tim Koglin, Conrad Schecker

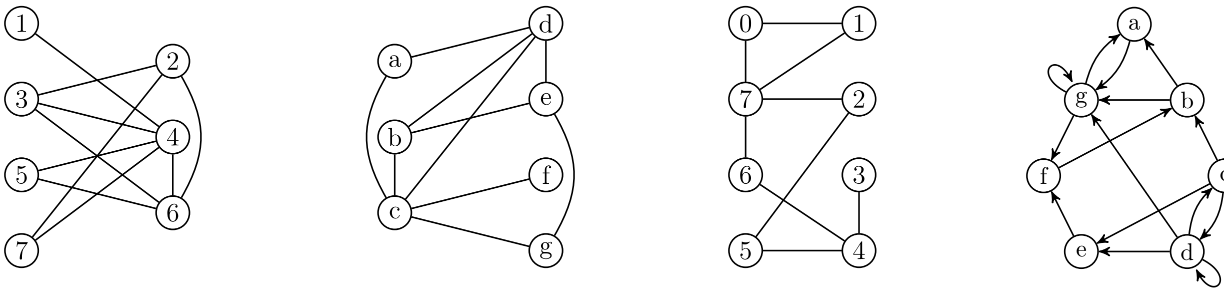
GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übungsblatt 7

Ausgabe: 11.12.2023
Abgabe: 18.12.2023, 23:55 Uhr

Aufgabe 7.1. *Grundbegriffe der Graphentheorie* $((4 \times 2) + 2 + 2 + (2 + 2) = 16$ Punkte)

Die Graphen G_1, G_2, G_3 und G_4 seien wie folgt in grafischer Darstellung gegeben.



G_1 G_2 G_3 G_4

a) In den Teilaufgaben i) bis iv) sind keine Begründungen verlangt.

i) Geben Sie eine Färbung von G_1 mit möglichst wenigen Farben an.

ii) Geben Sie ein perfektes Matching für G_3 an.

iii) Geben Sie alle starken Zusammenhangskomponenten von G_4 an.

iv) Geben Sie einen Isomorphismus $\pi : \{1, 2, \ldots, 7\} \to \{a, b, \ldots, g\}$ von G_1 nach G_2 an.

b) Ist G_1 bipartit? Eine kurze Begründung genügt.

c) Ist G_3 planar? Eine kurze Begründung genügt.

d) i) Besitzt G_1 einen Hamiltonweg? ii) Besitzt G_1 einen Eulerweg?
Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Weg an; falls nein, wieso nicht?

Bitte wenden!

Aufgabe 7.2. *Fanclubtreffen* (3 + 4 + 6 = 13 Punkte)

Um Protestaktionen gegen den nationalen Fußballverband zu organisieren, möchten die Fangruppierungen aus **D**ortmund, **F**rankfurt, **G**elsenkirchen, **H**amburg, **K**öln, **M**ünchen und **S**tuttgart zu einer unabhängigen Konferenz zusammenkommen. Trotz der gemeinsamen Abneigung gegen den nationalen Fußballverband gibt es teilweise ein erhebliches Konfliktpotenzial zwischen den verschiedenen Fangruppierungen:

1. Frankfurt-Fans sind bekannt für ihre grundsätzliche Abneigung gegenüber Fans anderer Vereine, weswegen es jeweils ein großes Konfliktpotenzial gibt. Lediglich Köln-Fans sind als solche nach Ansicht der Frankfurt-Fans schon genug bestraft (und die Köln-Fans denken sicherlich ähnlich über die Frankfurt-Fans), weshalb zwischen diesen beiden Fangruppierungen keine Konflikte zu erwarten sind.
2. Vereine aus demselben Bundesland sind grundsätzlich immer verfeindet. Zwischen Dortmund-Fans, Gelsenkirchen-Fans und Köln-Fans gibt es also paarweise ein großes Konfliktpotenzial. Aufgrund der geographischen Nähe sind außerdem München-Fans und Stuttgart-Fans verfeindet, auch wenn sie aus verschiedenen Bundesländern kommen.
3. Das Aufeinandertreffen von Hamburg-Fans und Stuttgart-Fans hat ein großes Konfliktpotenzial. Selbiges gilt für Dortmund-Fans und München-Fans, zwischen denen sich ebenfalls eine große Rivalität entwickelt hat.

Ansonsten kommen alle Fans miteinander aus.

a) Modellieren Sie die Situation durch einen Konfliktgraphen. Repräsentieren Sie die Fangruppierungen dabei durch die Knoten **D**, **F**, **G**, **H**, **K**, **M**, und **S**. Eine Kante zwischen zwei Knoten zeigt an, dass es zwischen den beiden Fangruppierungen ein erhöhtes Konfliktpotenzial gibt. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.

b) Für die Konferenz sollen aus Sicherheitsgründen mehrere Tagungsräume gemietet werden, um das Risiko nonverbaler Auseinandersetzungen zu minimieren. Geben Sie eine Einteilung der Gruppierungen in eine kleinstmögliche Anzahl von Tagungsräumen an, sodass innerhalb der Tagungsräume keine Konflikte auftreten. Begründen Sie, wieso weniger Räume nicht möglich sind. Nennen Sie auch das graphentheoretische Problem, das dahintersteckt.

c) Nach der Konferenz sollen die sieben Fangruppierungen in einem Zug mit sieben Waggons abreisen, wobei jede Fangruppierung genau einen Waggon belegt. Damit es dabei möglichst ruhig und friedlich bleibt, sollen je zwei Fangruppierungen mit Konfliktpotenzial keinesfalls in aufeinanderfolgenden Waggons untergebracht werden.

   Hinter der Frage, ob eine entsprechende Aufteilung der Fangruppierungen auf die Waggons existiert, steckt ein graphentheoretisches Problem. Erläutern Sie, um welches Problem es sich handelt, und geben Sie den in diesem Zusammenhang zu betrachtenen Graphen explizit an. Beantworten Sie auf dieser Basis die Frage, ob eine entsprechende Aufteilung existiert oder nicht. Falls ja, geben Sie diese explizit an, falls nein, begründen Sie kurz.

Bitte wenden!

Aufgabe 7.3. *Perfekte Matchings und Gewinnstrategien* (3 + 5 = 8 Punkte)

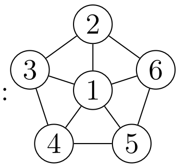
Alice und Bob spielen ein Spiel auf einem endlichen, zusammenhängenden und ungerichteten Graphen $G = (V, E)$. Sie wählen abwechselnd Knoten $v_1, v_2, v_3, \ldots$ aus V, so dass $(v_1, v_2, v_3, \ldots)$ ein einfacher Weg ist: $v_1, v_2, v_3, \ldots$ sind paarweise verschieden und es gilt jeweils $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Den ersten Knoten wählt Alice. Wer von den beiden zuletzt einen Knoten wählt, gewinnt das Spiel.

Eine *Gewinnstrategie* für einen Spieler in diesem Spiel ist eine Vorschrift, welche ihm sagt, welchen Zug er als nächstes tätigen soll. Hält sich der Spieler an diese Vorschrift, gewinnt er auf jeden Fall.

a) Geben Sie für den folgenden Graphen G^* ein *perfektes* Matching an und leiten Sie daraus eine Gewinnstrategie für Bob auf G^* ab.

b) Angenommen, ein Graph G besitzt ein perfektes Matching.
Zeigen Sie, dass Bob in dem Fall eine Gewinnstrategie auf G hat.

G^*:



Aufgabe 7.4. *Sittichverträgliche Baumaufteilung* (5 + 8 = 13 Punkte)

Ein Schwarm von n Halsbandsittichen im Frankfurter Solmspark möchte sich dort auf zwei Rosskastanien niederlassen. Obwohl sie sehr soziale Tiere sind, gibt es in dem Schwarm Paare von Individuen, die sich nicht gut vertragen. Die angespannte Stimmung innerhalb der Paare belastet den ganzen Schwarm und soll deswegen vermieden werden. Eine Aufteilung der Halsbandsittiche auf die zwei Bäume, bei der kein solches Paar auf demselben Baum sitzt, nennen wir *verträglich*.

Um zu überprüfen, ob eine verträgliche Aufteilung existiert, betrachten wir den ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, wobei jeder Knoten in $V = \{1, ..., n\}$ einen bestimmten Halsbandsittich repräsentiert. Zwischen zwei Halsbandsittichen $v, w \in V$ besteht eine Kante $\{v, w\} \in E$, wenn sich v und w nicht vertragen.

Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen:

a) Wenn es eine verträgliche Aufteilung gibt, dann gibt es in G keine Kreise ungerader Länge.

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, wie viele verschiedene Farben es höchstens braucht, um G zu färben, wenn die Aufteilung verträglich ist. Nutzen Sie diese Erkenntnis für den Beweis der Aussage.

b) Wenn es in G keine Kreise ungerader Länge gibt, dann ist die Aufteilung verträglich.

Hinweis: Sie können annehmen, dass G zusammenhängend ist. Betrachten Sie dann die Mengen

- $V_1 := \{v \in V :$ es gibt einen Weg ungerader Länge von Knoten v nach Knoten $1\}$, und
- $V_2 := \{v \in V :$ es gibt einen Weg gerader Länge von Knoten v nach Knoten $1\}$.

Zeigen Sie zunächst, dass $V_1 \cup V_2 = V$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ gilt. Zeigen Sie dann, dass keine Kante zwei Endknoten in V_1 oder zwei Endknoten in V_2 besitzt.

Die Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie unter
https://algo.cs.uni-frankfurt.de/lehre/dismod/winter2324/dismod2324.php

Kontakt: Tim Koglin, Conrad Schecker (dismod23@cs.uni-frankfurt.de).