

Übungsblatt 4

Ausgabe: 13.11.2023
Abgabe: 20.11.2023, 23:55 Uhr

Aufgabe 4.1. *Arbeiten mit Normalformen* (4 + (2 × 2) + 1 + (2 × 3) = 15 Punkte)

a) Geben Sie für jede der folgenden Formeln φ_i ohne Begründung an, ob sie in

- disjunktiver Normalform (DNF) vorliegt oder nicht.
- konjunktiver Normalform (KNF) vorliegt oder nicht.

i) $\varphi_1 := (A \vee B) \wedge C$

iii) $\varphi_3 := \neg(A \wedge \neg B) \vee \neg C$

ii) $\varphi_2 := (A \vee B) \wedge \neg(\neg C)$

iv) $\varphi_4 := \neg A \vee B \vee \neg C$

b) Gegeben sei die Formel $\psi := (A \oplus \neg C) \wedge (\neg B \rightarrow A) \wedge B$.

- Geben Sie eine zu ψ äquivalente Formel δ in DNF an.
- Geben Sie eine zu $\neg\psi$ äquivalente Formel κ in KNF an.

Es genügt jeweils eine kurze Herleitung als Begründung.

c) Geben Sie eine zu $\alpha := \neg \mathbf{1}$ äquivalente Formel α' in KNF an.

d) Lösen Sie die folgenden Aufgaben ohne Verwendung von Wahrheitstafeln. Begründen Sie Ihre Antwort stattdessen jeweils durch geeignete (äquivalente) Umformungen.

Geben Sie für die folgenden Formeln φ und χ die geforderte Normalform an:

i) Eine zu $\varphi := (A \rightarrow B) \rightarrow C$ äquivalente Formel φ' in DNF.

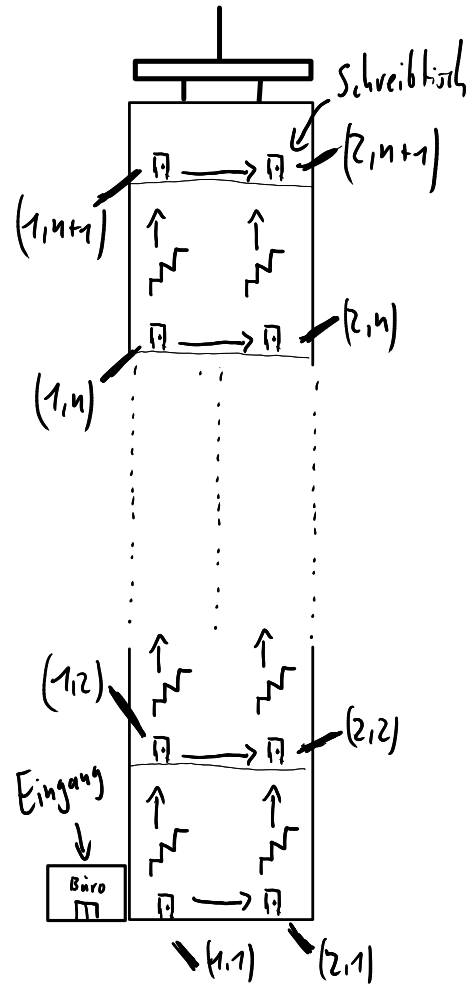
ii) Eine zu $\chi := (A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)$ äquivalente Formel χ' in KNF.

Es genügt jeweils eine kurze Herleitung als Begründung.

Aufgabe 4.2. DNFs im Büro

(4 + 6 + 4 = 14 Punkte)

Ein Büromensch möchte vom Eingang des Bürowolkenkratzers aus seinen Schreibtisch erreichen, der sich weit oben auf der anderen Seite des Gebäudes befindet. Da der Aufzug außer Betrieb ist, muss er die Treppen nehmen. Im Wolkenkratzer gibt es zwei zueinander parallele (vertikale) Treppenhäuser, die in jedem Stockwerk durch einen (horizontalen) Büroflur verbunden sind. Die Menge $\mathcal{Z}_n := \{1, 2\} \times \{1, 2, \dots, n+1\}$ enthält alle offenen Zugänge zwischen Treppenhäusern und Fluren. Zwischen je zwei Zugängen $(a, b), (a, b+1) \in \mathcal{Z}_n$ gibt es einen Treppenabschnitt, zwischen je zwei Zugängen $(1, b), (2, b) \in \mathcal{Z}_n$ verläuft ein passierbarer Flur. Der Haupteingang ist nahe Zugang $(1, 1)$, der ersehnte Schreibtisch befindet sich bei Zugang $(2, n+1)$.



Leider sind auch einige der vertikalen Treppenabschnitte aufgrund von Renovierungsarbeiten nicht begehbar. Der Büromensch möchte nun mit Hilfe von DNFs herausfinden, ob er seinen Schreibtisch überhaupt erreichen kann. Er definiert die aussagenlogischen Variablen $L_1, \dots, L_n, R_1, \dots, R_n$, wobei Variable L_i ausdrückt, dass der Treppenabschnitt zwischen den Zugängen $(1, i)$ und $(1, i+1)$ weiterhin begehbar ist, und R_i ausdrückt, dass der Treppenabschnitt zwischen den Zugängen $(2, i)$ und $(2, i+1)$ weiterhin begehbar ist.

Da der Büromensch seinen Beinen nicht zu viel zumuten möchte, kommen für ihn nur *erträgliche Wege* in Frage. Diese haben die folgenden Eigenschaften: (1) Er muss nie Treppen herunterlaufen und (2) nur in genau einem Stockwerk durch den Flur das Treppenhaus wechseln.

- Sei $n = 2$. Bestimmen Sie eine Formel φ_2 in DNF, die ausdrückt, dass der Büromensch seinen Schreibtisch trotz der Renovierungsarbeiten über mindestens einen erträglichen Weg erreichen kann.
- Bestimmen Sie für allgemeines $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eine Formel φ_n in DNF, die ausdrückt, dass der Büromensch seinen Schreibtisch trotz der Renovierungsarbeiten über mindestens einen erträglichen Weg erreichen kann.
- Bestimmen Sie für allgemeines $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eine Formel ψ_n in DNF, die ausdrückt, dass der Büromensch seinen Schreibtisch *nicht* über einen erträglichen Weg erreichen kann.

Beschreiben Sie jeweils zuerst Ihre Idee bzw. skizzieren Sie Ihren Lösungsweg.

Bitte wenden!

Aufgabe 4.3. Tower Defense

$((3 \times 2) + (2 + 12) + 1 = 21$ Punkte)

Eine mittelalterliche Königin möchte den Zugang zu ihrer Burg besser schützen. Nach Rücksprache mit ihrer Baumeistergilde wird schnell klar, dass die meisten herkömmlichen Verteidigungslösungen (wie z.B. Burggräben) aus verschiedenen Gründen nicht umsetzbar sind. Stattdessen sollen Türme im Vorhof der Burg errichtet werden, die dann mit Wachposten besetzt werden können. Diese können die umherwandernden Personen in der Nähe als (vertrauenswürdige) Untertanen oder als Eindringlinge identifizieren und gegebenenfalls Alarm schlagen.

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq 3$. Der Vorhof wird zur Modellierung in ein Raster mit n Zeilen und m Spalten unterteilt, woraus sich nm Felder ergeben, die wir in der Menge $F := \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ zusammenfassen. Hierbei bezeichnet $(i, j) \in F$ das Feld in Zeile i und Spalte j . Der Vorhof kann nur über das Feld $(n, 1)$ oder über den Burgeingang an Position $(1, m)$ erreicht werden.

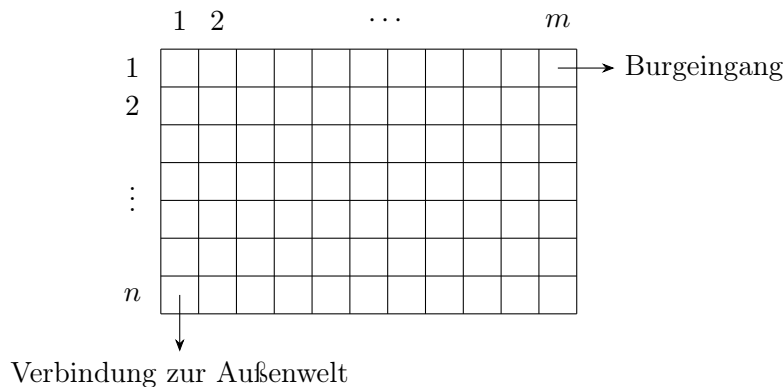


Abbildung 1: Illustration des Rasters

Zwei verschiedene Felder heißen *benachbart*, wenn entweder ihre Spaltenindizes identisch sind, während sich ihre Zeilenindizes um genau 1 unterscheiden, oder ihre Zeilenindizes identisch sind, während sich ihre Spaltenindizes um genau 1 unterscheiden.

Es gibt zwei verschiedene Arten von Türmen, die laut Baumeistergilde gebaut werden können: *Einzeltürme*, die genau ein Feld belegen, sowie größere *Vierertürme*, die vier zu einem Quadrat angeordnete Felder belegen. Formal belegt jeder *Viererturm* eine Menge M an Feldern mit $|M| = 4$, sodass es für jedes Feld $(i, j) \in M$ genau zwei verschiedene benachbarte Felder in M gibt. Für jeden *Einzelurm* auf Position (i, j) heißen die Zeilen bzw. Spalten *angrenzend*, auf denen ein von (i, j) benachbartes Feld liegt. Für jeden *Viererturm*, der die Menge M an Feldern belegt, heißen die Zeilen bzw. Spalten *angrenzend*, auf denen ein Feld liegt, dass zu mindestens einem Feld aus M benachbart ist, aber nicht selbst in M liegt.

Die Anordnung der Türme auf dem Raster darf nicht beliebig erfolgen, denn natürlich muss die Burg weiterhin von Außen erreichbar sein und auch die Türme müssen leicht zugänglich bleiben. Sie dürfen aber davon ausgehen, dass nur die beiden Arten von Türmen verwendet werden. Die Baumeistergilde stellt folgende Regeln für ihre Platzierung auf:

- 1) Jedes Feld kann nur mit höchstens einer Art Turm bebaut werden.
- 2) Die Felder $(n, 1)$ und $(1, m)$ müssen frei bleiben.
- 3) In den angrenzenden Spalten jedes *Einzelturms* müssen seine benachbarten Felder frei bleiben.
- 4) In den angrenzenden Spalten jedes *Viererturms* müssen seine benachbarten Felder frei bleiben.
- 5) In den angrenzenden Zeilen jedes *Einzelturms* darf sich kein weiterer *Einzelurm* befinden.
- 6) Die angrenzenden Zeilen jedes *Viererturms* müssen vollständig frei bleiben.

Die Suche nach einer gültigen Platzierung der Türme soll durch aussagenlogische Formeln modelliert werden. Die Variablenmenge sei $\text{AVAR} = \{E_{i,j} \mid (i, j) \in F\} \cup \{V_{i,j} \mid (i, j) \in F\}$, wobei $E_{i,j}$ genau dann wahr ist, wenn sich auf Feld (i, j) ein *Einzelurm* befindet und $V_{i,j}$ genau dann wahr ist, wenn sich auf Feld (i, j) ein Teil eines *Viererturms* befindet.

- a) Für einige der im Text definierten Begriffe soll eine alternative, formale Definition mithilfe von Mengen gefunden werden. Die explizite Verwendung der bereits definierten Begriffe ist hierbei ausgeschlossen. Definieren Sie entsprechend...
- i) ... die Menge $B_{i,j} \subseteq F$ aller benachbarten Felder eines beliebigen Feldes $(i, j) \in F$.
 - ii) ... die Menge $S_{i,j} \subseteq \{1, \dots, m\}$ aller angrenzenden Spalten eines *Einzelsturms*, der auf einem beliebigen Feld $(i, j) \in F$ platziert ist.
 - iii) ... die Menge $Z_M \subseteq \{1, \dots, n\}$ aller angrenzenden Zeilen eines beliebig platzierten *Viererturms*, der die Menge $M = \{(i, j), (i + 1, j), (i, j + 1), (i + 1, j + 1)\} \subseteq F$ an Feldern belegt.
- b) Stellen Sie nun aussagenlogische Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ auf, sodass φ_ℓ genau dann erfüllt ist, wenn die ℓ -te Regel für die Platzierung der Türme eingehalten wird. Gehen Sie dabei wie folgt vor:
- i) Geben Sie φ_1 und φ_2 in KNF ohne weitere Begründung an.
 - ii) Erläutern Sie jeweils kurz Ihre Idee zu $\varphi_3, \dots, \varphi_6$, bevor Sie die jeweilige Formel angeben. Diese muss nicht unbedingt in KNF vorliegen.
- c) Geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, die genau dann erfüllt ist, wenn alle sechs Regeln zur Platzierung der Türme eingehalten werden. Diese muss nicht unbedingt in KNF vorliegen.