

Kontextfreie Grammatiken

Was kann man mit kontextfreien Grammatiken anfangen?

Kontextfreie Grammatiken, kurz:

KFGs

werden zur Modellierung von

rekursiv definierten baumartigen Strukturen

eingesetzt.

KFGs werden unter Anderen für die Beschreibung von

- **Programmiersprachen** wie etwa C, Java, Pascal oder Python,
- bzw. **Datenaustauschformaten**, d.h. Sprachen (wie etwa HTML oder XML) als Schnittstelle zwischen Software-Werkzeugen,
- bzw. **Bäumen** zur Repräsentation strukturierter Daten (z.B. XML)

angewandt.

Eine kontextfreie Grammatik

$$G = (\Sigma, V, S, P)$$

besteht aus

- einer endlichen Menge Σ von **Terminalen** und einer endlichen Menge V von **Nichtterminalen** (oder **Variablen**).
 - ▶ Die Mengen Σ und V sind disjunkt, d.h. $\Sigma \cap V = \emptyset$ gilt.
 - ▶ Die Menge $W := \Sigma \cup V$ heißt **Vokabular**, die Elemente in W nennt man auch Symbole,
- einem Symbol $S \in V$, dem **Startsymbol** und
- einer endlichen Menge

$$P \subseteq V \times W^*$$

von **Produktionen**. Für eine Produktion $(A, x) \in P$ schreiben wir $A \rightarrow x$.

Wir möchten alle „wohl-gebildeten“ arithmetische Ausdrücke beschreiben,

- die über den Zahlen 1, 2, 3 gebildet sind und
- die Operatoren +, −, · sowie Klammern (,) benutzen.

Beispiele für wohl-gebildete arithmetische Ausdrücke sind

$$(1 + 3) \cdot (2 + 2 + 3) - 1$$

und

$$(1 + 3) \cdot ((2 + 2 + 3) - 1).$$

Wir betrachten die KFG $G_{AA} := (\Sigma, V, S, P)$ mit

- Terminalalphabet $\Sigma := \{1, 2, 3, +, -, \cdot, (,)\}$
- Nichtterminalalphabet $V := \{Ausdruck, Operator\}$
- Startsymbol $S := Ausdruck$
- und der Produktionsmenge

$$P := \left\{ \begin{array}{l} Ausdruck \rightarrow 1, \\ Ausdruck \rightarrow 2, \\ Ausdruck \rightarrow 3, \\ Ausdruck \rightarrow Ausdruck Operator Ausdruck, \\ Ausdruck \rightarrow (Ausdruck), \\ \\ Operator \rightarrow +, \\ Operator \rightarrow -, \\ Operator \rightarrow \cdot \end{array} \right\}$$

Wir sparen Schreibarbeit

Wir fassen Zeilen, die das gleiche Nichtterminal auf der linken Seite des Pfeils aufweisen, zu einer einzigen Zeile zusammen.

Damit können wir die Produktionsmenge P auch kurz wie folgt beschreiben:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} \textit{Ausdruck} \rightarrow 1 \mid 2 \mid 3 , \\ \textit{Ausdruck} \rightarrow \textit{Ausdruck Operator Ausdruck} \mid (\textit{Ausdruck}) , \\ \textit{Operator} \rightarrow + \mid - \mid \cdot \end{array} \right\}.$$

Die Produktion $\textit{Ausdruck} \rightarrow \textit{Ausdruck Operator Ausdruck}$ können wir auffassen

- als **Strukturregel**, die besagt „Ein *Ausdruck* besteht aus einem *Ausdruck*, gefolgt von einem *Operator*, gefolgt von einem *Ausdruck* — oder als
- **Ersetzungsregel**, die besagt, dass das „Symbol *Ausdruck* durch das Wort *Ausdruck Operator Ausdruck* ersetzt werden kann.“

Ableitungen

Ein Ableitungsschritt

Sei $G = (\Sigma, V, S, P)$ eine KFG.

Falls

$$A \rightarrow x$$

eine Produktion in P ist und $u \in W^*$ und $v \in W^*$ beliebige Worte über dem Vokabular $W = \Sigma \cup V$ sind, so schreiben wir

$$uAv \Longrightarrow_G uxv \quad (\text{bzw. kurz: } uAv \Longrightarrow uxv)$$

und sagen, dass uAv in einem **Ableitungsschritt** zu uxv umgeformt werden kann.

Mehrere Ableitungsschritte: Ableitungen

Eine **Ableitung** ist eine endliche Folge von hintereinander angewendeten Ableitungsschritten.

Für Worte $w \in W^*$ und $w' \in W^*$ schreiben wir

$$w \xRightarrow{*}_G w' \quad (\text{bzw. kurz: } w \xRightarrow{*} w'),$$

um auszusagen, dass es eine endliche Folge von Ableitungsschritten gibt, die w zu w' umformt.

Spezialfall: Diese Folge darf auch aus 0 Ableitungsschritten bestehen, d.h. f.a. $w \in W^*$ gilt:

$$w \xRightarrow{*}_G w.$$

Ableitungen: Ein Beispiel

Für die Grammatik $G_{AA} = (\Sigma, V, S, P)$ arithmetischer Ausdrücke gilt

$$\text{Ausdruck} \xRightarrow{*} (1 + 3) \cdot 2,$$

denn

$$P = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ausdruck} \rightarrow 1 \mid 2 \mid 3, \\ \text{Ausdruck} \rightarrow \text{Ausdruck Operator Ausdruck} \mid (\text{Ausdruck}), \\ \text{Operator} \rightarrow + \mid - \mid \cdot \end{array} \right\}.$$

und

$$\begin{aligned} \text{Ausdruck} &\Longrightarrow \text{Ausdruck Operator Ausdruck} \\ &\Longrightarrow (\text{Ausdruck}) \text{ Operator Ausdruck} \\ &\Longrightarrow (\text{Ausdruck Operator Ausdruck}) \text{ Operator Ausdruck} \\ &\Longrightarrow (\text{Ausdruck} + \text{Ausdruck}) \text{ Operator Ausdruck} \\ &\Longrightarrow (\text{Ausdruck} + \text{Ausdruck}) \cdot \text{Ausdruck} \\ &\Longrightarrow (1 + \text{Ausdruck}) \cdot \text{Ausdruck} \\ &\Longrightarrow (1 + 3) \cdot \text{Ausdruck} \\ &\Longrightarrow (1 + 3) \cdot 2 \end{aligned}$$

Kontextfreie Sprachen

Kontextfreie Sprachen $L(G)$

Sei $G = (\Sigma, V, S, P)$ eine KFG.

- (a) Die **von G erzeugte Sprache $L(G)$** ist die Menge aller Worte über dem Terminalalphabet Σ , die aus dem Startsymbol S abgeleitet werden können.
D.h.:

$$L(G) := \{w \in \Sigma^* : S \xRightarrow{*}_G w\}.$$

- (b) Eine Sprache L heißt genau dann **kontextfrei**, wenn es eine kontextfreie Grammatik G gibt mit

$$L = L(G).$$

Achtung: $L(G)$ ist eine Teilmenge von $\Sigma^* \implies$

In den Worten aus $L(G)$ kommen keine Nichtterminale vor!

Die von G_{AA} erzeugte Sprache

Die Sprache $L(G_{AA})$ besteht aus allen über den Zahlen 1, 2, 3, den Operatoren +, -, · und den Klammersymbolen (,) wohl-geformten arithmetischen Ausdrücken.

$$P = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ausdruck} \rightarrow 1 \mid 2 \mid 3 \text{ ,} \\ \text{Ausdruck} \rightarrow \text{Ausdruck Operator Ausdruck} \mid (\text{Ausdruck}) \text{ ,} \\ \text{Operator} \rightarrow + \mid - \mid \cdot \end{array} \right\}.$$

Welche Worte gehören zu $L(G_{AA})$?

- ? 3,
- ? (3 + 1),
- ? (),
- ? (3 + 1,
- ? 1 + 2 · 3,
- ? (3 + 1) · (2 + 2 + 3) - 1,
- ? 2 · ((3 + 1) · (2 + 2 + 3) - 1),
- ? ((3 + 1)),
- ? Ausdruck Operator Ausdruck

Wohlgeformte Klammerausdrücke

Sei D die Sprache aller wohl-geformten Klammerausdrücke über $\Sigma = \{ (,) \}$.

1. **Wohl-geformte Klammerausdrücke** sind

▶ $()$, $((()))$, $((()))()((()))$, $((()))$

2. **Nicht wohl-geformt** sind

▶ $((())$, $((())$

Es ist $D = L(G)$ für die kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, \{S\}, S, P)$ mit den Produktionen

$$S \rightarrow \epsilon \mid (S) \mid SS$$

Eine äquivalente Lösung erhält man mit den Produktionen

$$S \rightarrow \epsilon \mid (S)S.$$

Baue einen wohl-geformten Klammerausdruck **von links nach rechts** auf:

Die Produktion $S \rightarrow (S)S$ fügt die äußeren Klammern für den „linksten“ Klammerausdruck ein.

KFGs und Programmiersprachen

Ein Fragment von Pascal

Wir beschreiben einen (allerdings sehr kleinen) Ausschnitt von Pascal durch eine kontextfreie Grammatik.

- Wir benutzen das Alphabet $\Sigma = \{a, \dots, z, ;, :=, \text{begin}, \text{end}, \text{while}, \text{do}\}$ und
- die Variablen S , statements , statement , assign-statement , while-statement , variable , boolean , expression .
- variable , boolean und expression sind im Folgenden nicht weiter ausgeführt.

S	\rightarrow	$\text{begin statements end}$
statements	\rightarrow	$\text{statement} \mid \text{statement} ; \text{statements}$
statement	\rightarrow	$\text{assign-statement} \mid \text{while-statement}$
assign-statement	\rightarrow	$\text{variable} := \text{expression}$
while-statement	\rightarrow	$\text{while boolean do statements}$

Lassen sich die **syntaktisch korrekten** Programme einer modernen Programmiersprache durch eine kontextfreie Sprache definieren?

- 1. **Antwort: Nein.** In Pascal muss zum Beispiel sichergestellt werden, dass Anzahl und Typen von formalen und aktuellen Parameter übereinstimmen.
 - ▶ Die Sprache $\{ww : w \in \Sigma^*\}$ wird sich als **nicht** kontextfrei herausstellen.
- 2. **Antwort: Im Wesentlichen ja,** wenn man „Details“ wie Typ-Deklarationen und Typ-Überprüfungen ausklammert:
 - ▶ Man beschreibt die Syntax durch eine kontextfreie Grammatik, die alle syntaktisch korrekten Programme erzeugt.
 - ▶ Allerdings werden auch syntaktisch inkorrekte Programme (z.B. aufgrund von Typ-Inkonsistenzen) erzeugt.

Eine „kontextfreie“ Grammatik für Python

Eine Grammatik für Python wird beschrieben in

<https://docs.python.org/3/reference/grammar.html>

(zuletzt besucht am 30.01.2019)

Die Grammatik ist „*im Wesentlichen*“ kontextfrei: In der Beschreibung der Grammatik werden zum Beispiel folgende Notationen als hilfreiche Abkürzungen verwendet:

- der Kleene-Stern und das Kleene-Plus,
- eckige Klammern [...] für optionale Strings

Lässt man einen „**Lexer**“ in einem Vorverarbeitungsschritt über das Anwender-Programm laufen, um

- Einrückungen zu „verstehen“ (NEWLINE, INDENT, DEDENT),
- Schlüsselwörter (if, for, else, ...) zu entdecken,
- Kommentare zu entfernen, ...

dann hat der **Parser** im eigentlichen Verarbeitungsschritt nur noch ein kontextfreies Sprachenproblem zu lösen.

Die Backus-Naur-Form und die Java-Syntax

Die Backus-Naur-Form (BNF) wird zur Formalisierung der Syntax von Programmiersprachen genutzt.

- BNF ist ein „Dialekt“ der kontextfreien Grammatiken. Produktionen der Form

$$X \rightarrow aYb$$

(mit $X, Y \in V$ und $a, b \in \Sigma$) werden in BNF notiert als

$$\langle X \rangle ::= a \langle Y \rangle b$$

- **Beispiel:** Eine Beschreibung der Syntax von **Java** in einer BNF-Variante wird beschrieben in

<https://docs.oracle.com/javase/specs/jls/se11/html/index.html>
(zuletzt besucht am 05.02.2019)

Für kontextfreie Sprachen ist eine effiziente **Syntaxanalyse** möglich.

Frage: Was ist eine Syntaxanalyse?

Antwort: Die Bestimmung einer Ableitung bzw. eines Ableitungsbaums.

Und was ist ein Ableitungsbaum?

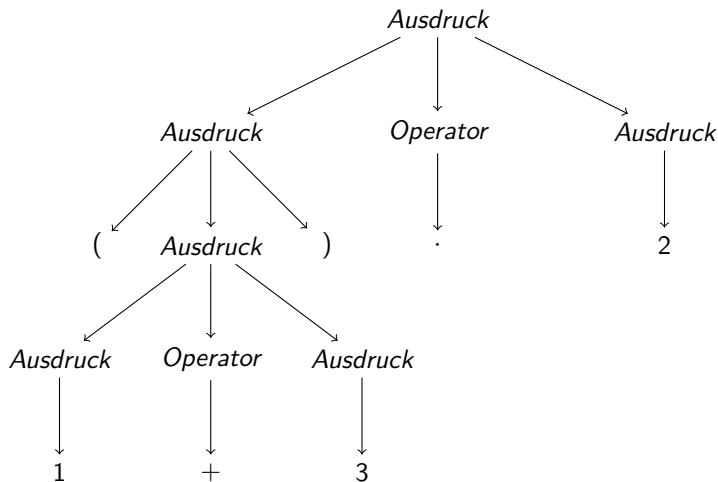
Ableitungsbäume

Ableitungen lassen sich am besten mit **Ableitungsbäumen** veranschaulichen.

Betrachte dazu in G_{AA} die Ableitung

$$\begin{aligned} \text{Ausdruck} &\implies \text{Ausdruck Operator Ausdruck} \\ &\implies (\text{Ausdruck}) \text{ Operator Ausdruck} \\ &\implies (\text{Ausdruck Operator Ausdruck}) \text{ Operator Ausdruck} \\ &\implies (\text{Ausdruck} + \text{Ausdruck}) \text{ Operator Ausdruck} \\ &\implies (\text{Ausdruck} + \text{Ausdruck}) \cdot \text{Ausdruck} \\ &\implies (1 + \text{Ausdruck}) \cdot \text{Ausdruck} \\ &\implies (1 + 3) \cdot \text{Ausdruck} \\ &\implies (1 + 3) \cdot 2 , \end{aligned}$$

Diese Ableitung hat den folgenden **Ableitungsbaum**:



Beachte: Ein Ableitungsbaum kann mehrere Ableitungen repräsentieren.

Sei $G = (\Sigma, V, S, P)$ eine KFG und sei $w \in L(G)$.

Jede Ableitung

$$S \xRightarrow{*}_G w$$

lässt sich als gerichteter Baum darstellen, bei dem

1. jeder Knoten mit einem Symbol aus $\Sigma \cup V \cup \{\varepsilon\}$ markiert ist und
2. die Kinder jedes Knotens eine festgelegte Reihenfolge haben.
 - ▶ In der Zeichnung eines Ableitungsbaums werden von links nach rechts zunächst das „erste Kind“ dargestellt, dann das zweite, dritte etc.
 - ▶ Der Ableitungsbaum ist also ein geordneter Baum.

3. Die Wurzel des Baums ist mit dem Startsymbol S markiert.
4. Jeder Knoten mit seinen Kindern repräsentiert die Anwendung einer Produktion aus P , also einer Produktion

$$A \rightarrow x \text{ mit } A \in V, x \in (V \cup \Sigma)^+.$$

Die Anwendung der Produktion wird im Ableitungsbaum repräsentiert durch einen Knoten v , der mit dem Symbol A markiert ist.

- ▶ Wenn $x \in (V \cup \Sigma)^+$, dann hat v genau $|x|$ viele Kinder, so dass das i -te Kind mit dem i -ten Symbol von x markiert ist (f.a. $i \in \{1, \dots, |x|\}$).
- ▶ Wenn $x = \varepsilon$, dann hat v genau ein Kind, das mit ε markiert ist.

1. Die Bedeutung eines syntaktisch korrekten Programms p wird durch **den** Ableitungsbaum von p bestimmt.
2. Und wenn es **mehrere** Ableitungsbäume für p gibt?

Die Spezifikation der Programmiersprache – also die KFG – muss garantieren, dass es für alle syntaktisch korrekten Programme nur **einen** Ableitungsbaum gibt.
*Solche KFGs heißen **eindeutig**.*

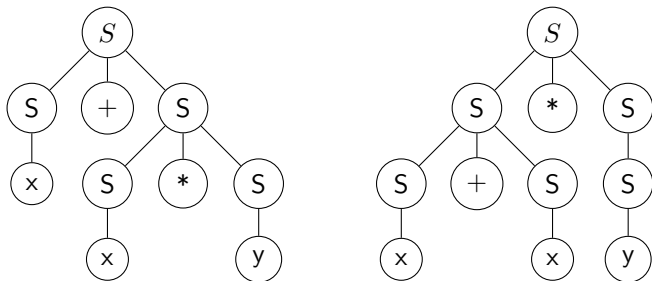
Arithmetische Ausdrücke: Eindeutige Grammatiken (1/2)

Die Produktionen $S \rightarrow S + S \mid S * S \mid (S) \mid x \mid y$ definieren arithmetische Ausdrücke auf **mehrdeutige** Art und Weise.

Denn das Wort

$$x + x * y$$

hat die beiden Ableitungsbäume:



Der erste Baum führt zur Auswertung $x + (x * y)$, der zweite zu $(x + x) * y$.

Wir brauchen eine eindeutige Grammatik!

Die neue Grammatik G legt fest, dass Multiplikation stärker "bindet" als Addition.

- $V := \{S, T, F\}$: S ist das Startsymbol, T „erzeugt“ Terme, F „erzeugt“ Faktoren.
- Die Produktionen von G haben die Form

$$S \rightarrow S + T \mid T$$

$$T \rightarrow T * F \mid F$$

$$F \rightarrow (S) \mid x \mid y.$$

Warum ist diese Grammatik eindeutig?

Eine Antwort wird in der Veranstaltung „**Theoretische Informatik**“ gegeben.

Klammerausdrücke: Eine eindeutige Grammatik

Die „**Klammersprache**“ L wird durch die Produktionen

$$S \rightarrow \epsilon \mid SS \mid (S).$$

erzeugt.

1. Die Grammatik ist **mehrdeutig**, denn zum Beispiel besitzt das leere Wort mehrere Ableitungsbäume. Welche?
2. Wir erhalten eine **eindeutige** Grammatik mit den Produktionen

$$S \rightarrow \epsilon \mid (S)S.$$

- ▶ Ein Klammerausdruck wird **zwangsweise** von links nach rechts aufgebaut.
- ▶ Die Produktion $S \rightarrow (S)S$ fügt die äußeren Klammern für den linkesten Klammerausdruck ein.

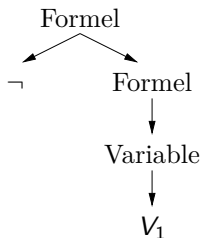
Wir konstruieren eine KFG

$$G_{AL} = (\Sigma, V, S, P),$$

deren Sprache $L(G_{AL})$ gerade die Menge aller aussagenlogischen Formeln ist, in denen nur Variablen aus $\{V_0, V_1, V_2\}$ vorkommen.

- **Terminale:** $\Sigma := \{ V_0, V_1, V_2, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus, (,) \}$,
- **Nichtterminale:** $V := \{ \text{Formel}, \text{Variable}, \text{Junktor} \}$,
- **Startsymbol:** $S := \text{Formel}$,
- **Produktionsmenge** $P :=$

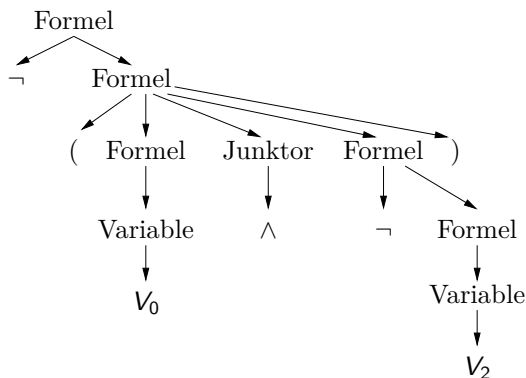
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Formel} \rightarrow \mathbf{0} \mid \mathbf{1} \mid \text{Variable} , \\ \text{Formel} \rightarrow \neg \text{Formel} \mid (\text{Formel} \text{ Junktor } \text{Formel}) , \\ \text{Variable} \rightarrow V_0 \mid V_1 \mid V_2 , \\ \text{Junktor} \rightarrow \wedge \mid \vee \mid \rightarrow \mid \leftrightarrow \mid \oplus \end{array} \right\}.$$



Der Ableitungsbaum repräsentiert die Ableitung

$$\begin{aligned} \text{Formel} &\Longrightarrow \neg \text{Formel} \\ &\Longrightarrow \neg \text{Variable} \\ &\Longrightarrow \neg V_1 \end{aligned}$$

Das durch diese(n) Ableitung(sbaum) erzeugte Wort in der Sprache $L(G_{AL})$ ist die Formel $\neg V_1$.

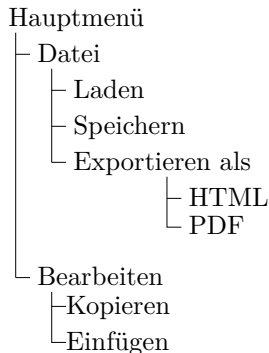


Dieser Ableitungsbaum repräsentiert die Ableitung der Formel $\neg(V_0 \wedge \neg V_2)$

$$\begin{aligned}
 \text{Formel} &\implies \neg \text{Formel} \implies \neg(\text{Formel Junktor Formel}) \\
 &\implies \neg(\text{Variable Junktor Formel}) \implies \neg(V_0 \text{ Junktor Formel}) \\
 &\implies \neg(V_0 \wedge \text{Formel}) \implies \neg(V_0 \wedge \neg \text{Formel}) \implies \neg(V_0 \wedge \neg \text{Variable}) \\
 &\implies \neg(V_0 \wedge \neg V_2).
 \end{aligned}$$

Ein **Menü** besteht aus einem Menünamen und einer Folge von Einträgen:
Ein Eintrag besteht aus einem Operationsnamen oder selbst wieder einem Menü.

Beispiel:



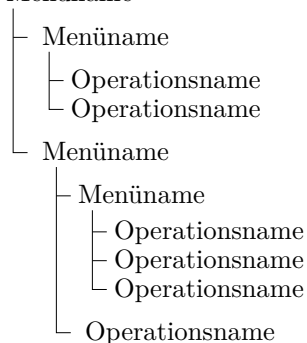
Ein **Menü** besteht aus einem Menünamen und einer Folge von Einträgen: Ein Eintrag besteht aus einem Operationsnamen oder selbst wieder einem Menü.

Benutze z.B. die Grammatik $G_{\text{Menü}} = (\Sigma, V, S, P)$ mit

- $\Sigma := \{ \text{Menüname, Operationsname} \},$
- $V := \{ \text{Menü, Eintragsfolge, Eintrag} \},$
- $S := \text{Menü},$
- $P := \left\{ \begin{array}{ll} \text{Menü} & \rightarrow \text{Menüname Eintragsfolge} , \\ \text{Eintragsfolge} & \rightarrow \text{Eintrag} \mid \text{Eintrag Eintragsfolge} , \\ \text{Eintrag} & \rightarrow \text{Operationsname} \mid \text{Menü} \end{array} \right\}.$

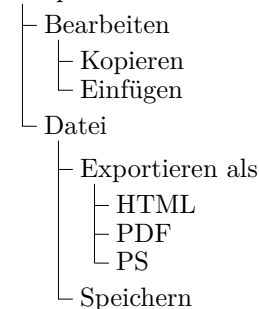
Die Struktur eines Menüs:

Menüname

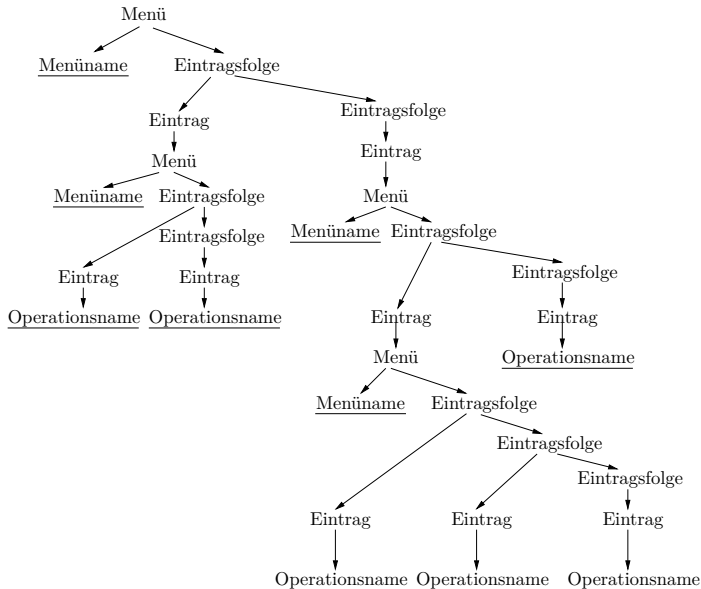


Beispiel für Namen:

Hauptmenü



Und wie sieht der Ableitungsbaum für das Beispiel aus?



HTML (HyperText Markup Language)

ist ein Format zur Beschreibung von verzweigten Dokumenten im Internet.

Uns interessiert hier der HTML-Code zur Erzeugung von HTML-Tabellen.

HTML-Tabellen: Ein Beispiel

Die HTML-Tabelle

Tag	Zeit	Raum
Di	8:00-10:00	Hörsaal VI
Do	8:00-10:00	Hörsaal VI

besitzt den HTML-Code:

```
<table>
  <tr>
    <td> Tag </td>
    <td> Zeit </td>
    <td> Raum </td>
  </tr>
  <tr>
    <td> Di </td>
    <td> 8:00-10:00 </td>
    <td> Hörsaal VI </td>
  </tr>
  <tr>
    <td> Do </td>
    <td> 8:00-10:00 </td>
    <td> Hörsaal VI </td>
  </tr>
</table>
```

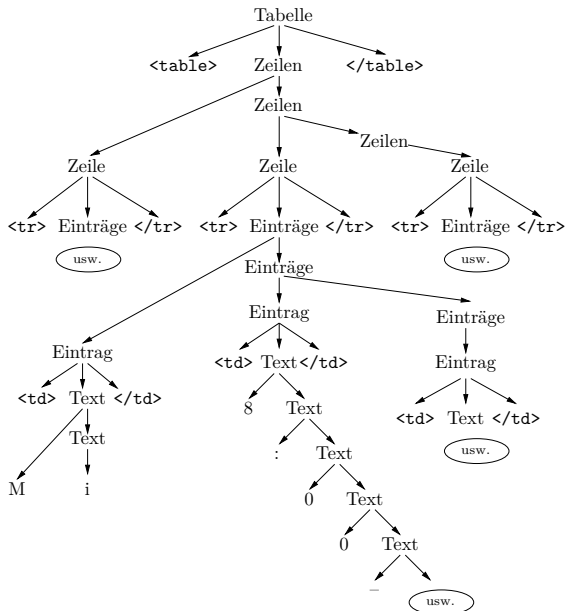
Die Symbole `<table>` und `</table>`, `<tr>` und `</tr>` bzw. `<td>` und `</td>` stehen für Anfang und Ende einer **Tabelle**, für Anfang und Ende einer **Zeile der Tabelle** bzw. Anfang und Ende eines **Eintrags in einer Zelle der Tabelle**.

Eine KFG zur Erzeugung von HTML-Tabellen

Wir konstruieren eine Grammatik $G_{\text{HTML}} = (\Sigma, V, S, P)$, so dass G_{HTML} genau die (möglicherweise geschachtelten) HTML-Tabellen erzeugt.

- $\Sigma := \{ \langle \text{table} \rangle, \langle / \text{table} \rangle, \langle \text{tr} \rangle, \langle / \text{tr} \rangle, \langle \text{td} \rangle, \langle / \text{td} \rangle, a, \dots, z, A, \dots, Z, 0, 1, \dots, 9, :, -, _ \}$
- $V := \{ \text{Tabelle}, \text{Zeilen}, \text{Zeile}, \text{Einträge}, \text{Eintrag}, \text{Text} \}$
- $S := \text{Tabelle}$
- $P := \{ \begin{array}{l} \text{Tabelle} \rightarrow \langle \text{table} \rangle \text{Zeilen} \langle / \text{table} \rangle, \\ \text{Zeilen} \rightarrow \text{Zeile} \mid \text{Zeile Zeilen}, \\ \text{Zeile} \rightarrow \langle \text{tr} \rangle \text{Einträge} \langle / \text{tr} \rangle, \\ \text{Einträge} \rightarrow \text{Eintrag} \mid \text{Eintrag Einträge}, \\ \text{Eintrag} \rightarrow \langle \text{td} \rangle \text{Text} \langle / \text{td} \rangle \mid \langle \text{td} \rangle \text{Tabelle} \langle / \text{td} \rangle, \\ \text{Text} \rightarrow a \text{Text} \mid b \text{Text} \mid \dots \mid z \text{Text} \mid A \text{Text} \mid B \text{Text} \mid \dots \mid Z \text{Text} \\ \text{Text} \rightarrow 0 \text{Text} \mid \dots \mid 9 \text{Text} \mid : \text{Text} \mid - \text{Text} \mid _ \text{Text}, \\ \text{Text} \rightarrow a \mid b \mid \dots \mid z \mid A \mid B \mid \dots \mid Z \mid 0 \mid \dots \mid 9 \mid : \mid - \mid _ \end{array} \}.$

Der Ableitungsbaum der HTML-Tabelle



Reguläre und kontextfreie Sprachen

Kann jede reguläre Sprache von einer kontextfreien Grammatik erzeugt werden?

Sei $G = (\Sigma, V, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik.

(a) G heißt **rechtsregulär**, wenn alle Produktionen die Form

$$A \rightarrow aB \text{ oder } A \rightarrow \varepsilon$$

für Variable $A, B \in V$ und ein Terminal $a \in \Sigma$ besitzen.

(b) G heißt **linksregulär**, wenn alle Produktionen die Form

$$A \rightarrow Ba \text{ oder } A \rightarrow \varepsilon$$

für Variable $A, B \in V$ und ein Terminal $a \in \Sigma$ besitzen.

- (a) Jede reguläre Sprache wird von einer rechtsregulären Grammatik erzeugt.
 - ▶ Siehe **Tafel**.
- (b) Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist eine **echte** Obermenge der regulären Sprachen, denn

$$L = \{ a^n b^n : n \in \mathbb{N} \}$$

- ▶ ist kontextfrei: Die kontextfreie Grammatik $G = (\{a, b\}, \{S\}, S, P)$ mit den Produktionen

$$S \rightarrow aSb \mid \epsilon$$

erzeugt L .

- ▶ aber L ist nicht regulär.

- (c) Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn es eine links- oder rechtsreguläre Grammatik G gibt mit

$$L = L(G).$$

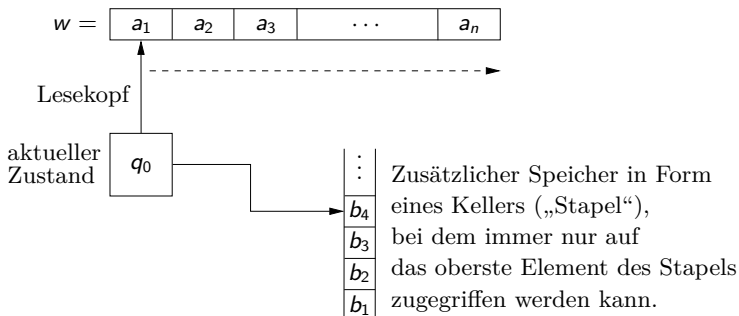
Details in der Veranstaltung „**Theoretische Informatik**“.

- (a) KFGs werden eingesetzt, um
rekursiv definierte Strukturen
zu modellieren.
- (b) Es gibt z. B. wichtige Anwendungen in der Spezifikation von
 - ▶ Programmiersprachen,
 - ▶ HTML,
 - ▶ XML.
- (c) Der Ableitungsbaum legt die Semantik eines syntaktisch korrekten Programms fest.

Ausblick

Kellerautomaten

Schematische Darstellung der Verarbeitung eines Eingabeworts durch einen **Kellerautomaten**:



In der „Theoretischen Informatik“ wird gezeigt, dass kontextfreie Grammatiken und nichtdeterministische Kellerautomaten genau die Klasse der kontextfreien Sprachen erzeugen, bzw. akzeptieren.

Eine Sprache L heißt **deterministisch kontextfrei**, wenn L von einem deterministischen Kellerautomaten akzeptiert wird.

- Die Sprache

$$L_1 = \{ a^n b^n : n \in \mathbb{N} \}$$

ist deterministisch kontextfrei,

- die Sprache

$$L_2 = \{ a^n b^n c^m : n, m \in \mathbb{N} \} \cup \{ a^m b^n c^n : n, m \in \mathbb{N} \}$$

ist kontextfrei, aber nicht deterministisch kontextfrei.

Details in der Veranstaltung „**Theoretische Informatik**“.

Das Wortproblem:

„Erzeugt eine KFG $G = (\Sigma, V, S, P)$ das Wort w ?“

spricht: „Ist das Programm w syntaktisch korrekt?“

Ein Parser muss das Wortproblem für jedes Eingabeprogramm w lösen, deshalb kommt dem Wortproblem eine große Bedeutung zu.

- (a) Der CYK-Algorithmus löst das Wortproblem für eine Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ in Zeit proportional zu $|w|^3 \cdot |P|$.
- (b) **Kubische** Laufzeit ist völlig inakzeptabel, das Wortproblem für **deterministisch kontextfreie Sprachen** ist hingegen in **Linearzeit** lösbar.
 - ▶ Die Syntax vieler Programmiersprachen wird deshalb von deterministisch kontextfreien Grammatiken definiert.

Details in der Veranstaltung „**Theoretische Informatik**“.

Eine nicht-kontextfreie Sprache

(a) Die Sprache

$$L = \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$$

ist **nicht** kontextfrei,

(b) aber ihre Komplement-Sprache

$$\bar{L} = \{w \in \{a, b, c\}^* : w \notin L\}$$

ist kontextfrei!

Details in der Veranstaltung „**Theoretische Informatik**“.

Kontextfreie Sprachen sind nicht unter Komplementbildung abgeschlossen!