

Übungsblatt 8

Ausgabe: 10.01.2023
Abgabe: 17.01.2023, **08:00**

Aufgabe 8.1 *Suchen von Summen*

(7 + 6 Punkte)

- a) Gegeben sei ein Array A von n ganzen Zahlen $A[1], \dots, A[n] \in \mathbb{Z}$ und eine ganze Zahl x .
Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der entscheidet, ob es zwei (möglicherweise identische) Indizes i, j gibt, so dass $A[i] + A[j] = x$ gilt. Analysieren Sie die Laufzeit und argumentieren Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.
- b) Sei nun zusätzlich bekannt, dass A nur ganze Zahlen aus der Menge $\{0, 1, \dots, n^{2023} - 1\}$ enthält.
Entwerfen Sie ein Verfahren, welches das Problem in Zeit $\mathcal{O}(n)$ löst. Begründen Sie, warum Ihr Algorithmus korrekt arbeitet und die Laufzeitschranke einhält.

Aufgabe 8.2 *Polynomielle Reduktion und die Klassen \mathcal{P} und \mathcal{NP}*

(4 + 4 Punkte)

Seien A und B Entscheidungsprobleme und es gelte $A \leq_p B$. Zeigen oder Widerlegen Sie folgende Aussagen:

- a) Wenn $B \in \mathcal{P}$, dann ist auch $A \in \mathcal{P}$.
- b) Wenn $A \in \mathcal{NP}$, dann ist auch $B \in \mathcal{NP}$.

Aufgabe 8.3 *Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit*

(5 Punkte)

Geben Sie für die folgende Sprache an, ob sie entscheidbar ist oder nicht. Beweisen Sie Ihre Antwort.

$$L = \{ \langle M \rangle : M \text{ ist eine Turingmaschine und } M \text{ hält genau} \\ \text{dann, wenn die Eingabe gerade Länge hat} \}$$

Aufgabe 8.4 *\mathcal{NP} -vollständige Probleme und Approximation*

(7 + 7 Punkte)

In einem Gebäude gibt es m Räume, zu denen es jeweils *drei* Schlüssel gibt. Die Schlüssel befinden sich an n Schlüsselbunden, wobei die Schlüssel eines jeden Raumes an drei verschiedenen Schlüsselbunden sind. Ziel ist es, möglichst wenige Schlüsselbunde auszuwählen, so dass damit noch immer alle Räume schließbar sind.

- a) Der Schlüsselkasten des Pförtners besitzt k Haken, an denen jeweils ein Schlüsselbund eingehängt werden kann. Der Pförtner fragt sich, ob es eine Auswahl von Schlüsselbunden gibt, so dass diese in seinen Schlüsselkasten passen und damit dennoch alle Räume schließbar sind.

Zeigen Sie: Das Entscheidungsproblem des Pförtners ist \mathcal{NP} -vollständig.

- b) Der Pförtner möchte nun die Anzahl der benötigten Schlüsselbunde minimieren. Entwerfen Sie einen Approximationsalgorithmus für das Problem. Ihr Algorithmus soll 3-approximativ sein und eine polynomielle worst-case Laufzeit haben. Begründen Sie, warum Ihr Algorithmus beide Kriterien erfüllt.