Approximationsalgorithmen

Optimierungsprobleme

Das Ziel: Bearbeite schwierige Optimierungsprobleme der Form

$$\text{opt}_y f(x, y) \quad \text{so dass} \quad L(x, y).$$

- Die Zielfunktion $f(x, y)$ ist zu minimieren oder zu maximieren: Wir nehmen stets $\text{opt} \in \{\min, \max\}$ an.
- x ist die Eingabe, oder die Beschreibung des Problems. y heißt eine Lösung für Eingabe x, wenn das Lösungsprädikat L erfüllt ist.
- Eine Lösung y mit optimalem Wert $f(x, y)$ ist zu bestimmen.
- Wir spezifizieren das Optimierungsproblem durch das Tripel (opt, f, L) (Web)

Beispiele

- Das Clique Problem besitzt Graphen $G = (V, E)$ als Eingaben.
  - Genau die Cliquen $C \subseteq V$ sind Lösungen. Also ist

$$L(G, C) \quad \Leftrightarrow \quad C \subseteq V \text{ und je zwei Knoten in } C \text{ sind durch eine Kante in } G \text{ verbunden}$$

  - $f(G, C) = |C|$ ist die zu maximierende Zielfunktion.
- Im Rucksackproblem sind n Objekte mit Gewichten $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{R}$ und Werten $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{N}$ gegeben. Das Ziel: Bepacke den Rucksack, so dass einerseits eine Gewichtsschranke $G \in \mathbb{R}$ nicht überschritten wird und andererseits der Gesamtwert der eingepackten Objekte maximal ist.
  - Die Eingabe x besteht aus den Gewichten, den Werten und der Gewichtsschranke.
  - Lösungen werden durch die Teilmengen $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ eingepackter Objekte beschrieben, wobei $L(x, I) \Leftrightarrow \sum_{i \in I} g_i \leqslant G$.
  - $f(x, I) = \sum_{i \in I} w_i$ ist die zu maximierende Zielfunktion.

Approximationsalgorithmen

Sei $P = (\text{opt}, f, L)$ ein Optimierungsproblem.

- y^* heißt eine optimale Lösung für Eingabe x, falls

$$f(x, y^*) = \text{opt}\,\{f(x, y) \mid y \text{ ist eine Lösung, d.h. es gilt } L(x, y)\,\}.$$

  Wir setzen $\text{opt}_P(x) := f(x, y^*)$.
- Ein Approximationsalgorithmus A für P berechnet auf jeder Eingabe x eine Lösung $A(x)$.

Wir möchten schnelle Approximationsalgorithmen entwerfen, die gute Lösungen berechnen.

Wie gut ist eine Approximation?

Approximationsfaktoren

Eine Lösung y von P für Eingabe x heißt δ-approximativ, wenn

$$f(x, y) \geqslant \frac{\max_P(x)}{\delta} \quad \text{für ein Maximierungsproblem}$$

beziehungsweise wenn

$$f(x, y) \leqslant \delta \cdot \min_P(x) \text{ für ein Minimierungsproblem.}$$

- Der Approximationsfaktor ist stets mindestens 1.
- Wenn wir den Approximationsfaktor $\delta = 1$ erreichen, dann haben wir das Optimierungsproblem exakt gelöst.
- Je kleiner der Approximationsfaktor, umso besser ist die gefundene Lösung.

Ein Beispiel: Das metrische Traveling Salesman Problem

- Wir haben die Spannbaum Heuristik für M-TSP entworfen.
- Wenn L die Länge der von uns berechneten Tour ist und wenn $\texttt{opt}$ die minimale Länge einer Rundreise ist, dann haben wir

$$L \leqslant 2 \cdot \texttt{opt}$$

  nachgewiesen.
- Die Spannbaum Heuristik ist ein 2-approximativer Approximationsalgorithmus für M-TSP.

Wie gut können schwierige Optimierungsprobleme approximiert werden?

- Optimierungsprobleme mit NP-vollständigen Entscheidungsproblemen zeigen starke Variationen.
  - Einige Probleme, wie zum Beispiel das Rucksackproblem, sind sehr scharf durch effiziente Algorithmen approximierbar.
  - Andere, wie zum Beispiel das Problem der Last-Verteilung sind schon etwas schwieriger.
  - Dann folgt das Vertex Cover Problem und das noch schwierigere Clique Problem.
  - Zu den ganz harten Brocken gehören die 0-1 Programmierung und die ganzzahlige Programmierung.
- Was weiss man über die Approximationskomplexität schwieriger Probleme? (Web)

Last-Verteilung

Wir haben bereits die folgenden Scheduling Probleme untersucht.

- Im (gewichteten) Intervall Scheduling
  - haben wir eine wertvollste Auswahl von Aufgaben bei vorgeschriebenen Start- und Terminierungszeiten auf einem Prozessor ausgeführt.
- Für das Scheduling mit minimaler Verspätung haben wir die maximale Verspätung bei gegebenen Fristen und Laufzeiten mit einem Greedy Algorithmus minimiert.

Das Lastverteilungsproblem: Nur die Rechenzeiten der Aufgaben sind bekannt. Alle Aufgaben können sofort abgearbeitet werden.
Das Ziel: Verteile die Aufgaben so auf m identische Prozessoren, dass der Makespan, also der Zeitraum in dem **alle** Aufgaben abgearbeitet werden, minimal ist.

Das On-line Lastverteilungsproblem

In einem realistischen Szenario muss die Last verteilt werden, „wenn sie anfällt“. Insbesondere kann die Zuweisung weiterer Aufgaben nicht abgewartet werden: Ein On-line Algorithmus muss Entscheidungen treffen ohne die Zukunft zu kennen. (Web)

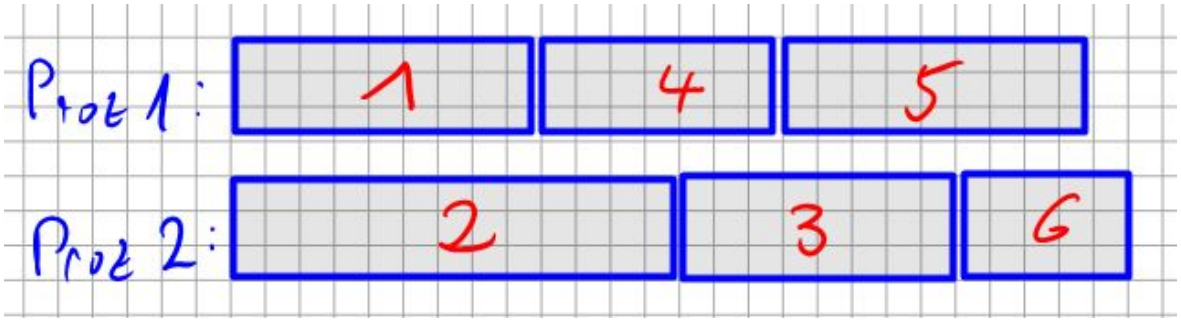
Ein On-line Scheduling Algorithmus:

- Aufgaben $1, \ldots, n$ mit Rechenzeiten $t_1, \ldots, t_n$ sind gegeben.
- Die Aufgaben werden „der Reihe nach“ abgearbeitet. Wenn Aufgabe i „dran“ ist, dann

  weise Aufgabe i dem Prozessor mit der bisher geringsten Last zu

Greedy-Online Scheduling multiple choice

Aufgaben für zwei Prozessoren entstehen in der Reihenfolge 1, 2, ...
Welche ist die erste Aufgabe, die *nicht* gemäß Greedy-Online Scheduling zugewiesen wurde?



Auflösung: (3)

Der Approximationsfaktor für das On-line Scheduling

Die On-line Strategie ist 2-approximativ.

- Angenommen, Prozessor i trägt die größte Last.
  Der Makespan T ist dann die Gesamtlaufzeit von Prozessor i.
- Prozessor i möge die Aufgabe j als letzte Aufgabe ausführen.
  - Zum Zeitpunkt $T - t_j$ sind alle Prozessoren „busy“: Ansonsten hätte eine freie Maschine die Aufgabe j früher übernommen. Also ist

$$\sum_{k=1}^{n} t_k \geqslant (m-1) \cdot (T - t_j) + T = mT - (m-1) \cdot t_j \geqslant mT - m \cdot t_j.$$

  - Dividiere durch m und $T - t_j \leqslant \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{n} t_k$ folgt.
  - Sei opt der optimale Makespan. Dann ist
    $$T - t_j \leqslant \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{n} t_k \leqslant \text{opt} \text{ und } t_j \leqslant \text{opt}.$$
  - Also ist $T = (T - t_j) + t_j \leqslant 2 \cdot \text{opt}$.

Wie gut war unsere Analyse?

Ein worst-case Beispiel:

- Insgesamt $(m-1) \cdot m + 1$ Aufgaben liegen vor. Alle Aufgaben bis auf die letzte sind „kurze“ Aufgaben der Länge 1. Die letzte Aufgabe ist „lang“ und hat die Ausführungszeit m.
- Der optimale Makespan ist m:
  - Ein Prozessor führt die lange Aufgabe aus.
  - Die verbleibenden $m-1$ Prozessoren teilen die $(m-1) \cdot m$ kurzen Aufgaben unter sich auf.
- Unsere On-line Heuristik führt zuerst alle kurzen Aufgaben in der Zeit $m-1$ aus. Die lange Aufgabe wird zuletzt ausgeführt und kostet m zusätzliche Schritte.
- Unsere Heuristik hat Schwierigkeiten, wenn lange Aufgaben zuletzt abgearbeitet werden.

Eine Off-line Heuristik

(1) Aufgaben $1, \ldots, n$ mit Rechenzeiten $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \cdots \geqslant t_n$ sind gegeben.

(2) Die Aufgaben werden der Reihe nach abgearbeitet. Wenn Aufgabe i „dran“ ist, dann

weise Aufgabe i dem Prozessor mit der bisher geringsten Last zu.

Die zentrale Beobachtung

Sei opt der minimale Makespan für m Prozessoren.
Dann ist $2 \cdot t_{m+1} \leqslant \text{opt}$.

- Es ist $t_1 \geqslant \cdots \geqslant t_m \geqslant t_{m+1}$.
- Um die ersten $m+1$ Aufgaben abzuarbeiten, muss ein Prozessor zwei Aufgaben ausführen.
- Seine Bearbeitungszeit ist mindestens $2 \cdot t_{m+1}$.

Der Approximationsfaktor der Off-line Heuristik

Der Approximationsfaktor sinkt auf höchstens $\frac{3}{2}$, wenn Aufgaben gemäß fallender Bearbeitungszeit präsentiert werden.

- Wir betrachten wieder den Prozessor i mit größter Last. Prozessor i möge die Aufgabe j als Letzte ausführen.
- Es ist $t_j \leqslant t_{m+1}$, denn wir arbeiten die Aufgaben nach fallender Bearbeitungszeit ab. Also

$$2 \cdot t_j \leqslant 2 \cdot t_{m+1} \leqslant \text{opt}$$

- Wir haben $t_j \leqslant \text{opt}/2$ gerade nachgewiesen und wissen, dass $T - t_j \leqslant \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{n} t_k \leqslant \text{opt}$ gilt ▸.
- Also folgt $T = (T - t_j) + t_j \leqslant \text{opt} + \text{opt}/2 = 3 \cdot \text{opt}/2$. (Der tatsächliche Approximationsfaktor ist $4/3$.)

Das Rucksackproblem

n Objekte mit Gewichten $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{R}$ und Werten $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{N}$ sind in einen Rucksack mit Kapazität höchstens G zu packen.
Der Gesamtwert der Bepackung ist zu maximieren. (Web)

- Das Rucksackproblem ist NP-vollständig.
- Wir lösen ein anderes Problem, nämlich: Bestimme

$$\text{Gewicht}_i(w) \quad = \quad \text{das minimale Gewicht einer Bepackung aus den ersten } i \text{ Objekten mit Gesamtwert } w.$$

- Wir lösen das Rucksackproblem, wenn wir nach dem größten Wert w mit $\text{Gewicht}_n(w) \leqslant G$ suchen.
- Wir wenden dynamisches Programmieren an, um $\text{Gewicht}_n(w)$ für alle möglichen Werte $w \leqslant \sum_{i=1}^{n} w_i$ zu bestimmen.

Bestimmung von Gewicht$_i(w)$

- Wie kann das Gewicht minimiert werden, wenn Wert w zu erbringen ist?
  - Wenn das $i$te Objekt in den Rucksack gepackt wird, dann erhöht sich das Gewicht um g_i und der Restwert $w - w_i$ ist von den ersten $i-1$ Objekten zu erbringen.
  - Oder aber das $i$te Objekt wird nicht in den Rucksack gepackt und der Wert w ist mit Hilfe der ersten $i-1$ Objekte zu erbringen.
  - Wir erhalten die Rekursionsgleichungen

    $$\text{Gewicht}_i(w) := \min\left\{\text{Gewicht}_{i-1}(w - w_i) + g_i,\ \text{Gewicht}_{i-1}(w)\right\}.$$

- Sei $W = \sum_{i=1}^{n} w_i$. Wir bestimmen Gewicht$_i(w)$ für alle $w \leqslant W$.
  - Es gibt insgesamt $n \cdot W$ Teilprobleme Gewicht$_i(W)$.
  - Da jedes Teilproblem in Zeit $O(1)$ gelöst wird, erhalten wir die Laufzeit $O(n \cdot W)$.

Das Rucksackproblem für große Werte

Schnelle Algorithmen bei kleinen Werten

Das Rucksackproblem für n Objekte und Wertesumme $W = \sum_{i=1}^{n} w_i$ kann in Zeit $O(n \cdot W)$ gelöst werden.

- Problematisch sind Objekte mit sehr großen Werten.
- Die Idee:
  - Skaliere die Werte herunter.
  - Löse das neue Rucksackproblem mit den jetzt kleinen Werten exakt.
- Wie gut ist die Approximation?

Der Approximationsalgorithmus

(1) Der Approximationsfaktor $1+\varepsilon$ sei vorgegeben. Entferne alle Objekte, deren Gewicht die Gewichtsschranke G übersteigt.

(2) Die Werte werden nach unten skaliert, nämlich setze

$$w_i^* = \lfloor \frac{w_i}{s} \rfloor \text{ für den Skalierungsfaktor } s = \frac{\varepsilon \cdot w_{\max}}{n}.$$

(3) Berechne eine exakte Lösung für die neuen Werte $(w_1^*, \ldots, w_n^*)$.

(4) Bestimme für die nach neuen Werten ausgewählten Objekte den Gesamtwert $\tilde{w}$ gemäß alter Werte und gib $\max\{\tilde{w}, w_{\max}\}$ aus.
// Wir erhalten den Wert $w_{\max}$, wenn wir nur das Objekt mit
// maximalen Wert einpacken.

- Der größte neue Wert ist $w_{\max}^* = \lfloor \frac{w_{\max}}{s} \rfloor = \lfloor \frac{n}{\varepsilon} \rfloor$.
- Die Wertesumme der neuen Werte ist also höchstens $O(\frac{n^2}{\varepsilon})$.
- Die Laufzeit ist also durch $O(\frac{n^3}{\varepsilon})$ beschränkt.

Wie gut ist die Approximation?

Der Skalierungsalgorithmus ist $(1+\varepsilon)$-approximativ mit Laufzeit $O(\frac{1}{\epsilon} \cdot n^3)$.

- Angenommen, die optimale Bepackung für die neuen Werte packt genau die Objekte in der Menge $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ ein.
  Sei B_{opt} die optimale Bepackung für die alten Werte.

$$\sum_{i \in B_{\text{opt}}} w_i \leqslant sn + \sum_{i \in B_{\text{opt}}} s \cdot \lfloor \frac{w_i}{s} \rfloor \leqslant sn + \sum_{i \in B} s \cdot \lfloor \frac{w_i}{s} \rfloor$$

  denn B ist die beste Bepackung für die neuen Werte. Also ist

$$\sum_{i \in B_{\text{opt}}} w_i \leqslant sn + \sum_{i \in B} w_i \ .$$

- Es ist $s \cdot n = \frac{\varepsilon \cdot w_{\max}}{n} \cdot n = \varepsilon \cdot w_{\max}$. Wenn $w_{\max} \leqslant \sum_{i \in B} w_i$, dann

$$\sum_{i \in B_{\text{opt}}} w_i \leqslant \varepsilon \cdot w_{\max} + \sum_{i \in B} w_i \leqslant (1+\varepsilon) \cdot \sum_{i \in B} w_i .$$

Und wenn der maximale Wert sehr groß ist?

- Wir müssen nur noch den Fall $w_{\max} > \sum_{i \in B} w_i$ betrachten.
- Jetzt gibt der Skalierungsalgorithmus den Wert $w_{\max}$ aus. Wie gut ist diese Bepackung im Vergleich zur optimalen Bepackung?

$$\sum_{i \in B_{\text{opt}}} w_i \leqslant \varepsilon \cdot w_{\max} + \sum_{i \in B} w_i \leqslant \varepsilon \cdot w_{\max} + w_{\max} = (1 + \varepsilon) \cdot w_{\max}.$$

Wir haben also in Zeit $O(\frac{1}{\epsilon} \cdot n^3)$ einen $(1 + \varepsilon)$-approximativen Algorithmus erhalten. Wir müssen also nur moderat mit Laufzeit bezahlen, um eine gute Approximation zu erhalten.

Man sagt deshalb auch, dass unser Approximationsalgorithmus ein volles Approximationsschema ist.

Rucksackproblem mit Skalierung demogr.

Wenn die approximative Lösung nur 10 Prozent schlechter als das Optimum sein darf, dann braucht der gerade vorgestellte Algorithmus folgende Laufzeit:

- (1) $\Theta(n^2)$
- (2) $\Theta(n^3)$
- (3) $\Theta(n^{3+1/10})$
- (4) $\Theta(n^{10})$

Auflösung: (2) $\Theta(\frac{1}{\epsilon} \cdot n^3)$ mit $\epsilon = 0.1$

Das (ungewichtete) Vertex Cover Problem

Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ suchen wir eine kleinstmögliche Überdeckung, also eine Menge $\ddot{U}$ von Knoten, so dass alle Kanten einen Endpunkt in $\ddot{U}$ besitzen.

- Angenommen ein Matching $M \subseteq E$, also eine Menge von knoten-disjunkten Kanten, ist gegeben.
  Dann muss jede Überdeckung $\ddot{U}$ für jede Kante in M einen Endpunkt enthalten und $|\ddot{U}| \geqslant |M|$ folgt.
- Die Idee: Wir berechnen ein nicht vergrößerbares Matching M und definieren $\ddot{U}$ als die Menge **aller** Endpunkte von Kanten aus M.
  - Behauptung: $\ddot{U}$ ist eine Überdeckung.
  - Warum? Wenn die Kante $e = \{u, v\}$ keinen Endpunkt in $\ddot{U}$ besitzt, dann ist weder u noch v Endpunkt einer Kante aus M.
    Also ist $M \cup \{e\}$ ein größeres Matching.
- Wie berechnet man ein nicht vergrößerbares Matching?

Die Matching Heuristik

(1) Die Eingabe besteht aus einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$. Setze $M := \emptyset$.

(2) while ($E \neq \emptyset$)

- Wähle eine Kante $e \in E$ und füge e zu M hinzu.
- Entferne alle Kanten aus E, die einen Endpunkt mit e gemeinsam haben.

(3) Gib die Knotenmenge
$\ddot{U} = \{ v \in V \mid v \text{ ist Endpunkt einer Kante in } M \}$ aus.
// Wir wissen bereits, dass $\ddot{U}$ eine Überdeckung ist.
// Desweiteren muss jede Überdeckung mindestens $|M| \geqslant |\ddot{U}|/2$
// Knoten besitzen.

Die Matching Heuristik ist ein 2-Approximationsalgorithmus für *VC*.

Matching Heuristik demogr.

Welche Laufzeit hat die Matching-Heuristik?

- (1) $\Theta(n+m)$
- (2) $\Theta(n \log n + m)$
- (3) $\Theta((n+m) \log n)$
- (4) $\Theta((n+m)^2)$

Auflösung: (1), arbeite mit Adjazenzlisten.

Besitzt die Matching Heuristik vielleicht bessere Approximationsfaktoren als 2?

Betrachte den vollständigen bipartiten Graphen mit n Knoten „auf jeder Seite“.

- Eine optimale Überdeckung wählt die n Knoten einer Seite aus.
- Jedes nicht vergrößerbare Matching besteht aus n Kanten, weil sonst mindestens ein Endpunkt auf jeder Seite frei bleibt.
- Damit wählt die Matching Heuristik alle $2n$ Knoten als Überdeckung.

Das gewichtete Vertex Cover Problem

Jeder Knoten v des Graphen $G = (\{1, \ldots, n\}, E)$ erhält das Gewicht w_v. Gesucht ist eine Überdeckung mit minimalem Gewicht.

- Wir benutzen die lineare Programmierung. Das gewichtete Vertex Cover Problem kann wie folgt formuliert werden:

$$\text{minimiere } \sum_{v \in V} w_v \cdot x_v \qquad \text{so dass } x_u + x_v \geqslant 1 \text{ für alle } \{u, v\} \in E$$

$$\text{und } x_u \geqslant 0 \text{ für alle } u \in V.$$

- Wenn $U \subseteq \{1, \ldots, n\}$ eine Überdeckung ist, dann ist der Inzidenzvektor x_U von U eine Lösung. Aber es gibt unerwünschte fraktionale Lösungen.
  - Jede Überdeckung für den vollständigen Graphen (mit Gewichten $w_v = 1$) benötigt mindestens $n - 1$ Knoten, aber
  - das lineare Programm hat die fraktionale Lösung $x = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$ mit Zielwert $n/2$.

Das Runden fraktionaler Lösungen

- **Unser Approximationsalgorithmus:**
  (1) Bestimme eine optimale Lösung x^* des linearen Programms.
  (2) Runde die im Allgemeinen fraktionale Lösung x^*, nämlich setze

$$\ddot{U} = \{v \in V \mid x_v^* \geqslant \frac{1}{2}\}.$$

- $\ddot{U}$ ist tatsächlich eine Überdeckung, denn für jede Kante $\{u, v\}$ von G ist $x_u^* + x_v^* \geqslant 1$. Also ist $x_u^* \geqslant \frac{1}{2}$ oder $x_v^* \geqslant \frac{1}{2}$. $u \in \ddot{U}$ oder $v \in \ddot{U}$ folgt.
- Wie gut ist die Approximation?

  Wenn opt $= \sum_{v=1}^{n} w_v \cdot x_v^*$, dann hat jede Überdeckung mindestens die Größe opt. Also folgt

$$\sum_{v \in \ddot{U}} w_v \leqslant \sum_{v \in V} w_v \cdot (2x_v^*) = 2 \cdot \sum_{v \in V} w_v \cdot x_v^* = 2 \cdot \text{opt}$$

Zusammenfassung

Die Rundung fraktionaler Lösungen

Nach Rundung erhalten wir eine 2-approximative Lösung für das gewichtete Vertex-Cover Problem.

- Wir haben verschiedene, für Optimierungsprobleme wichtige Entwurfsmethoden eingesetzt.
  - In der Lastverteilung haben wir mit Greedy Algorithmen gearbeitet.
  - Für das Rucksackproblem haben wir die dynamische Programmierung und
  - für das gewichtete Vertex Cover Problem die lineare Programmierung eingesetzt.