Algorithmen & Datenstrukturen 1

Sommersemester 2022

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Prof. Dr. Martin Hoefer
Tim Koglin, Marco Schmalhofer

Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übungsblatt 1

Ausgabe: 19.04.2022
Abgabe: 26.04.2022, **08:00**

Die Übungsgruppen wurden am 14.4. durch das AUGE-System zugeteilt. Sie können das Ergebnis dort abrufen. Außerdem wurden am 14.4. die Links für die Onlineabgabe verschickt. Sollten Sie bis zum 19.4. diese E-Mail nicht bekommen haben, aber am Übungsbetrieb teilnehmen wollen, schreiben Sie umgehend an algo122@cs.uni-frankfurt.de. Bitte beachten Sie, dass die Zusendung an Ihre HRZ-Mailadresse (...@stud.uni-frankfurt.de) erfolgt ist (überprüfen Sie auch Ihren Spam-Ordner). Abgaben per E-Mail sind *nicht vorgesehen*.

Durch erfolgreiche Bearbeitung der Übungsaufgaben können Sie einen Bonus von bis zu 10% für die Klausur erwerben, sofern Sie mindestens einmal vorgerechnet und die Klausur bestanden haben. Mit * markierte Aufgaben sind Bonusaufgaben, d.h. sie werden nicht zur Summe der erreichbaren Punkte hinzugezählt. Die Aufgaben sind grundsätzlich ohne zusätzliche Tipps und Hilfestellungen lösbar. Sollten zusätzliche Informationen nötig sein, wird es einen schriftlichen Hinweis auf dem entsprechenden Aufgabenblatt geben. **Antworten müssen stets begründet werden, sofern der Aufgabentext Sie nicht explizit davon befreit!**

Weitere Informationen zum Übungsbetrieb finden Sie auf unserer Webseite.

Aufgabe 1.1 *Asymptotische Notation* (5 × 2 Punkte)

Bestimmen Sie für jedes der folgenden Paare, ob $f = \mathcal{O}(g)$, $f = o(g)$, $f = \Omega(g)$, $f = \omega(g)$ oder $f = \Theta(g)$ gilt. Es genügt, wenn Sie die Beziehung so exakt wie möglich beschreiben. Zum Beispiel müssen Sie im Fall $f = \Theta(g)$ nicht auch $f = \mathcal{O}(g)$ und $f = \Omega(g)$ angeben.

a) $f(n) = \log(n)$, $\quad g(n) = \log(n^5 \log n)$

b) $f(n) = \sqrt{n}$, $\quad g(n) = 4^{\log_8 n}$

c) $f(n) = n^2$, $\quad g(n) = 2^{-100} \cdot n^2 \log n$

d) $f(n) = n$, $\quad g(n) = \begin{cases} 2^n, & \text{falls } n < 99999, \\ \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i, & \text{falls } n \geq 99999. \end{cases}$

e) $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i$, $\quad g(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 - (i-1)^2$

Aufgabe 1.2 *Zusammenhänge asymptotischer Beziehungen* (4 × 3 + 3* Punkte)

Es seien $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *monotone* Funktionen, die Laufzeiten bestimmen.
Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) $f_1 = \mathcal{O}(g_1),\ f_2 = \mathcal{O}(g_2) \quad \Rightarrow \quad f_1 + f_2 = \mathcal{O}(g_1 + g_2)$

b) $f = \Omega(g) \quad \Rightarrow \quad f^2 = \Omega(g^2)$

c) $f(n) = g(n+1) \quad \Rightarrow \quad f = \Theta(g)$

d) $f = o(g),\ f_1 = \Omega(g) \quad \Rightarrow \quad f = o(f_1)$

*e)** Es gilt stets $f = \mathcal{O}(g)$ oder $f = \Omega(g)$.

Aufgabe 1.3 *Binomialkoeffizienten abschätzen* (4 + 4 Punkte)

Sei $k \in \mathbb{N}$ eine konstante natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k} = \Theta(n^k)$ für den Binomialkoeffizienten gilt, indem Sie zeigen, dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

a) Zeigen Sie $\binom{n}{k} = \mathcal{O}(n^k)$.

b) Zeigen Sie $\binom{n}{k} = \Omega(n^k)$.

Sie können für diese Aufgabe annehmen, dass $\binom{n}{k} = 0$ für $n < k$.

Aufgabe 1.4 *Das Ratespiel* (6 + 4 Punkte)

Der kleine Theo ist bei seinen Großeltern zu Besuch. Da es zu stark regnet, um im Garten toben zu können, schlägt ihm seine Oma ein Spiel vor: Sie denkt sich eine zufällige Zahl zwischen 1 und 50 aus und Theo muss versuchen, die Zahl zu erraten. Schafft er es, bekommt er zehn Bonbons als Belohnung.

Aus Erfahrung weiß Theo, dass er beim Raten meistens Pech hat und daher wohl die falsche Zahl raten würde. Daher macht er seiner Oma einen Änderungsvorschlag: Für jeden Fehlversuch wird ein Bonbon abgezogen, so dass er beispielsweise nach vier Fehlversuchen noch sechs Bonbons bekommen würde. Allerdings soll er auch bei jedem Fehlversuch den Hinweis von ihr bekommen, ob er zu hoch oder zu niedrig geraten hat.

a) Gibt es ein Verfahren, so dass Theo auf jeden Fall ein Bonbon erhält? Wenn ja, geben Sie ein solches Verfahren an, wenn nein, begründen Sie, warum es kein solches Verfahren geben kann.

b) Wie viele Bonbons erhält Theo nach diesem Verfahren - sofern es existiert - mindestens?

Bei allgemeinen Anmerkungen zu den Übungsaufgaben oder Fragen zum Übungsbetrieb erreichen Sie uns unter der folgenden E-Mail-Adresse: algo122@cs.uni-frankfurt.de.