

Übung 7

Ausgabe: 29.05.2018

Abgabe: 12.06.2018

Die Abgabe ist in der Vorlesung am Dienstag bis 10:15h möglich. Für frühere Abgaben kannst Du den Briefkasten zwischen Raum 114 und 115 nutzen. Bitte schreibe Deinen Namen (in Druckbuchstaben) und die Matrikelnummer auf deine Lösung und **tackere** diese, wenn sie aus mehreren Seiten besteht!

Aufgabe 7.1. VCG und Ein-Gut-Auktion

(2 + 2 Punkte)

- a) Betrachte eine Ein-Gut-Auktion mit $n > 2$ Bieter. Wir nehmen an, alle Gebote sind verschieden – ansonsten nutzen wir ein konsistentes Tie-Breaking, um die Gebote in eine totale Reihenfolge zu bringen. Das Gut wird dem Bieter mit höchstem Gebot gegeben. Der Gewinner zahlt das k t-höchste Gebot für ein $k \in \{2, 3, 4, \dots, n\}$. Die anderen Bieter zahlen nichts. Für welche Werte k ist dieser Mechanismus anreizkompatibel? Begründe Deine Antwort.
- b) Betrachte eine Auktion mit zwei Gütern A und B , sowie drei Bieter. Bieter 1 hat Bewertung 1 wenn er $\{A, B\}$ bekommt, d.h. $v_1(AB) = 1$ und 0 sonst. Bieter 2 hat Bewertung 1 wenn er mindestens A bekommt, d.h. $v_2(AB) = v_2(A) = 1$ und 0 sonst. Bieter 3 hat Bewertung 1 wenn er mindestens B bekommt, d.h. $v_3(AB) = v_3(B) = 1$ und 0 sonst. Gib die VCG Zuweisung und Zahlungen (mit Clarke-Rule) in den Fällen an wenn (1) nur Bieter 1 und 2 teilnehmen; und (2) wenn alle drei Bieter teilnehmen. Wie verändert sich die Summe aller Zahlungen im VCG Mechanismus? Begründe Deine Antwort.

Aufgabe 7.2. Single-Parameter Mechanismen

(2 + 3 + 4 Punkte)

Wir betrachten ein Kommunikationsnetzwerk, repräsentiert durch einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$. In G ist jede Kante e im Besitz eines Agenten a_e . Die Firma TreeComm möchte nun eine Teilmenge T der Kanten nutzen, um ein zusammenhängendes Netzwerk aufzubauen. Den Agenten der Kanten in T entstehen dadurch private Kosten c_e . Jeder Agent a_e kann einen (beliebigen) Kostenwert $c_e \geq 0$ an TreeComm mitteilen. Basierend auf diesen berichteten Kosten kauft TreeComm einen minimalen Spannbaum T^* , der $\sum_{e \in T^*} c_e$ minimiert. TreeComm zahlt jedem Agenten a_e mit $e \in T^*$ einen Geldbetrag $p_e \geq 0$ (sowie $p_e = 0$ wenn $e \notin T^*$). Wir nehmen an, dass in G mindestens zwei kantendisjunkte Spannbäume existieren.

- Gibt es Zahlungen p_e , so dass der Mechanismus anreizkompatibel wird?
- TreeComm merkt, dass für jede Kante sowieso einen gewisser Grundbetrag an Aufwendungen anfällt. Daher möchte man doch lieber einen Spannbaum T_1^* kaufen, der $\sum_{e \in T_1^*} \max\{10, c_e\}$ minimiert. Gibt es Zahlungen, so dass der Mechanismus anreizkompatibel wird?

- Nach der Aufsichtsratssitzung hat man sich nochmal unentschieden – der Aufsichtsrat hat Zielkosten vorgegeben, an denen sich die Netzwerkkosten orientieren sollen. TreeComm möchte nun einen Spannbaum T_2^* kaufen, der $\left(1000 - \sum_{e \in T_2^*} c_e\right)^2$ minimiert. Gibt es Zahlungen, so dass der Mechanismus anreizkompatibel wird?

Begründe Deine Antworten.

Aufgabe 7.3. *Semi-Smoothness*

(1 + 4 + 4 + 2 Punkte)

In der Vorlesung haben wir Spiele gesehen, für die die *Smoothness*-Eigenschaft nicht zu guten Schranken für den PoA führt. Es gibt allerdings noch stärkere Varianten der Eigenschaft. In dieser Übung betrachten wir das ungewichtete Max-Cut-Spiel in der Maximierungsvariante:

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Jeder Knoten $v \in V$ ist ein Spieler. Die Kanten repräsentieren Paare von Spielern, die sich nicht mögen. Es gibt zwei Vereine, und jeder Spieler muss einem Verein beitreten. Der Nutzen von Spieler i ist die Anzahl seiner Nachbarn in G , die im anderen Verein sind.

Der soziale Nutzen in Zustand s ist $u(s) = \sum_{i \in \mathcal{N}} u_i(s)$. Der Preis der Anarchie ist der maximale Nutzen $u(s^*)$ durch den schlechtesten (erwarteten) sozialen Nutzen im Gleichgewicht.

Die *Smoothness*-Eigenschaft kann für Nutzenmaximierungsspiele analog definiert werden:

Definition 1 (Smoothness mit Nutzen). *Ein Spiel ist (λ, μ) -smooth für $\lambda, \mu > 0$, wenn für jeden Spieler i und jedes Paar von Zuständen s, s' gilt*

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} u_i(s'_i, s_{-i}) \geq \lambda \cdot u(s') - \mu \cdot u(s).$$

- Zeige, dass für ein beliebiges Nutzenmaximierungsspiel mit Smoothness-Eigenschaft der Preis der Anarchie für reine Nash-Gleichgewichte höchstens $\frac{1+\mu}{\lambda}$ ist.
- Zeige, dass das Max-Cut-Spiel nicht (λ, μ) -smooth ist mit $\frac{1+\mu}{\lambda} < 3$.

Definition 2 (Semi-Smoothness mit Nutzen). *Ein Spiel ist (λ, μ) -semi-smooth, wenn für jeden Spieler i eine gemischte Strategie σ_i existiert, so dass für jeden Zustand s und jeden optimalen Zustand s^* gilt*

$$\mathbb{E}_\sigma \left[\sum_{i \in \mathcal{N}} u_i(\sigma_i, s_{-i}) \right] \geq \lambda \cdot u(s^*) - \mu \cdot u(s).$$

- Zeige, dass das Max-Cut Spiel $(1/2, 0)$ -semi-smooth ist.
Hinweis: Was passiert, wenn die Spieler die Vereine mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ wählen?
- Benutze die Semi-Smoothness-Eigenschaft um zu beweisen, dass der Preis der Anarchie für grob-korrelierte Gleichgewichte im Max-Cut-Spiel höchstens 2 ist.

Die Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie unter <http://algo.cs.uni-frankfurt.de/lehre/agt/sommer18/agt18.shtml>

Email: mhoefer@cs.uni-frankfurt.de, Nakhe@em.uni-frankfurt.de