Datenstrukturen (DS)

Sommersemester 2017

Prof Dr. Martin Hoefer
Niklas Hahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übung 1

Ausgabe: 18.04.2017
Abgabe: 02.05.2017

Durch die Übungsaufgaben können Sie einen Bonus für die Klausur von bis zu 10% erwerben. Dafür gelten die auf der Veranstaltungsseite (`http://tinygu.de/ds17`) beschriebenen Regeln.
Für alle Übungsaufgaben gilt:
Ihre Antworten sind stets zu begründen, solange Sie nicht im Aufgabentext davon befreit werden.

Aufgabe 1.1. *Zusammenhänge asymptotischer Beziehungen* (12 Punkte)

Es seien $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monotone Funktionen, die Laufzeiten bestimmen.
Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) $f_1 = \Omega(g_1),\ f_2 = \Omega(g_2) \quad \Rightarrow \quad f_1 + f_2 = \Omega(g_1 + g_2)$.

b) $f_1 = \Theta(g_1),\ f_2 = \Theta(g_2) \quad \Rightarrow \quad f_1 \cdot f_2 = \Theta(g_1 \cdot g_2)$.

c) $f = \mathcal{O}(g) \quad \Rightarrow \quad 2^f = \mathcal{O}(2^g)$.

d) $f(n) = g(\frac{n}{2}) \quad \Rightarrow \quad f = \Omega(g)$.

e) $f = \mathcal{O}(f_1),\ f_1 = \Omega(f_2) \quad \Rightarrow f = \mathcal{O}(f_2)$.

f) $f = o(f_1),\ f_1 = \mathcal{O}(f_2) \quad \Rightarrow f = o(f_2)$.

Aufgabe 1.2. *Asymptotische Notation* (10 Punkte)

Bestimmen Sie für jedes der folgenden Paare, ob $f = \mathcal{O}(g)$, $f = o(g)$, $f = \Omega(g)$, $f = \omega(g)$ oder $f = \Theta(g)$ gilt. Eine kurze Begründung ist notwendig. Es genügt, die Beziehung so exakt wie möglich beschreiben, zum Beispiel müssen Sie im Fall $f = \Theta(g)$ nicht auch $f = \mathcal{O}(g)$ und $f = \Omega(g)$ angeben.

a) $f(n) = \log(n), \quad g(n) = \log(n^3 \log n)$

b) $f(n) = n^{\frac{1}{3}}, \quad g(n) = 2^{\log_4 n}$

c) $f(n) = 2n^3, \quad g(n) = \begin{cases} n^2 & \text{falls } n > 5000, \\ 5n^4 & \text{falls } n \leq 5000. \end{cases}$

d) $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i, \quad g(n) = \sum_{i=0}^{n} (1/2^i)$

e) $f(n) = 2^{100} n, \quad g(n) = n^{1.4}$

Bitte wenden!

Aufgabe 1.3. *Professor Kalk* (6 Punkte)

Professor Kalk hat vergessen, wo sein Auto geparkt ist. Dabei hat der Parkplatz die Form des Buchstaben **V**, und Professor Kalk steht an der Spitze des **V**. Er kann sich nicht erinnern, auf welcher Seite und wie weit entfernt von der Spitze das Auto geparkt ist. Professor Kalk betritt grundsätzlich nicht den Rasen zwischen den Seiten des **V**. Er kann sein Auto nur identifizieren, wenn er seinen Schlüssel probiert. Geben Sie eine Strategie an, mit der Professor Kalk sein Auto findet, und bei der sein Weg nur einen konstanten Faktor länger ist als der kürzeste Weg zum Auto. Wir gehen davon aus, dass alle Autos die gleiche Länge haben und, dass zwischen geparkten Autos keine Lücken sind. Ferner sind beide Seiten des **V** beliebig lang, sodass „auf der einen Seite bis zum Ende laufen, zurückkommen und die andere Seite probieren“ keine Lösung darstellt.

Aufgabe 1.4. *Ein Ratespiel* (6 Punkte)

Der kleine Theo ist bei seinen Großeltern zu Besuch. Wie immer denkt sich Theos Großmutter eine zufällige Zahl zwischen 1 und 100 aus und Theo versucht sie zu erraten. Schafft er es, bekommt er zehn Gummibärchen als Belohnung. Da Theo häufig Pech hat und die falsche Zahl rät, denkt er sich den folgenden Deal aus:
Für jeden Fehlversuch wird ein Gummibärchen abgezogen, sodass er beispielsweise nach fünf Fehlversuchen noch fünf Gummibärchen erhalten würde. Allerdings soll er auch bei jedem Fehlversuch den Hinweis bekommen, ob er zu hoch oder zu niedrig geraten hat.

- Gibt es ein Verfahren, sodass Theo bei jedem Besuch Gummibärchen erhält? Wenn ja, geben Sie ein solches Verfahren an, wenn nein, begründen Sie, warum es kein solches Verfahren geben kann.
- Wie viele Gummibärchen erhält Theo nach diesem Verfahren - sofern es existiert - mindestens?